POHYBOVÁ ROVNICE KMITAVÉHO POHYBU A JEJÍ ŘEŠENÍ

VOLNÉ KMITÁNÍ

Při **volném** kmitání působí na mechanický oscilátor o hmotnosti m **pouze** časově proměnná **elastická** síla $\vec{F}_\mathrm{p}$, jejíž (okamžitá) velikost $F_\mathrm{p}(t)$ je přímo úměrná (okamžité) velikosti $y(t)$ vektoru $\vec{y}(t)$ okamžité výchylky oscilátoru. Elastická síla je silou **direkční**, usilující o návrat oscilátoru do jeho rovnovážné polohy – je tedy v každém okamžiku **nesouhlasně** rovnoběžná s vektorem okamžité výchylky $\left(\vec{F}_\mathrm{p} \uparrow\downarrow \vec{y}\right)$ - platí tedy

$$\vec{F}_\mathrm{p}(t) = -\,k\,\vec{y}(t);\; k>0\,;\; [k] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

k je **tuhost** oscilátoru vystihující jeho „pružné“ vlastnosti – schopnost „odolávat, poddávat či nepoddávat se“ vnější deformující síle $\vec{F} = -\vec{F}_\mathrm{p}$.

Podle **2. NEWTONOVA** pohybového zákona vyvolává elastická síla **zrychlení** $\ddot{\vec{y}}(t) = \mathrm{d}^2\vec{y}(t)/\mathrm{d}t^2$ oscilátoru o hmotnosti m, takže zmíněný zákon můžeme zapsat ve tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_\mathrm{p} \Rightarrow\; m\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2} = -\,k\vec{y} \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\,ky \Rightarrow$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + ky = 0 \qquad \textbf{(1.1)}$$

Vztahu označenému **(1.1)** říkáme **pohybová rovnice** volně (a jak dále uvidíme **harmonicky**) kmitajícího (jednoduchého) mechanického oscilátoru.

Z matematického hlediska jde o (obyčejnou) homogenní lineární **diferenciální** rovnici 2.řádu s konstantními koeficienty, jejíž řešení je velmi jednoduché.

Rovnici **(1.1)** upravíme na tvar

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + ky = 0 \;\Big|\cdot\frac{1}{m} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}y = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y = 0\,;\; \omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0\,;\; [\omega_0] = \mathrm{s}^{-1} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Řešení diferenciální rovnice **(1.2)** převedeme na řešení tzv. **charakteristické** rovnice – algebraické rovnice, v níž neznámou funkci s příslušnou derivací $[y^{(n)}(t)]$ nahradíme výrazem α^n; exponent n je roven řádu (n) derivace neznámé funkce. Charakteristická rovnice příslušející rovnici **(1.2)** má tedy tvar

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0\,. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Řešením (kořeny) této kvadratické rovnice jsou dvě komplexně sdružená **komplexní** čísla $\alpha_1 = i\omega_0$; $\alpha_2 = -i\omega_0$.

Charakteristická rovnice příslušející (homogenní) lineární diferenciální rovnici 2.řádu s konstantními koeficienty je **kvadratickou** rovnicí, která má dvě řešení (dva kořeny) α_1, α_2. Každému z těchto kořenů charakteristické rovnice přísluší jedna z funkcí, tvořících dohromady tzv. **fundamentální systém** řešení původní (homogenní) lineární diferenciální rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty i nekonečně mnoha **nehomogenních** rovnic, které mají **stejnou** levou stranu. Vzhledem k hodnotě diskriminantu D charakteristické rovnice mohou nastat tyto případy:

1. $D > 0$ - kořeny charakteristické rovnice jsou (dvě) **různá reálná čísla** $(\alpha_1 \neq \alpha_2\,;\, \alpha_1, \alpha_2 \in R)$. Fundamentální systém řešení příslušné původní (homogenní) lineární diferenciální rovnice je tvořen funkcemi $y_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha_1 t}$ a $y_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha_2 t}$. Obecné řešení (homogenní) lineární diferenciální rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty pak má tvar

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\alpha_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\alpha_2 t}\,;}$$

$C_1, C_2 \in \mathrm{R}$ jsou **integrační konstanty**, jejichž konkrétní hodnoty se určí z **počátečních podmínek** úlohy.

2. $D = 0$ - kořeny charakteristické rovnice jsou (dvě) **stejná reálná čísla** – kvadratická rovnice má tzv.**dvojnásobný** kořen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \in R$. Fundamentální systém řešení příslušné původní (homogenní) lineární diferenciální rovnice je tvořen funkcemi $y_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$ a $y_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\alpha t}$. Obecné řešení (homogenní) lineární diferenciální rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty pak má tvar

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\alpha t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,.}$$

$C_1, C_2 \in \mathrm{R}$ jsou **integrační konstanty**, jejichž konkrétní hodnoty se určí z **počátečních podmínek** úlohy.

3. $D < 0$ - kořeny charakteristické rovnice jsou **dvě různá komplexní** (komplexně sdružená) čísla, která lze zapsat v obecném tvaru $\alpha_{1,2} = a \pm \mathrm{i}b$ (i je imaginární jednotka). Fundamentální systém řešení příslušné původní (homogenní) lineární diferenciální rovnice je v tomto případě tvořen funkcemi

$$\alpha_1 = a + \mathrm{i}b : \boxed{y_1(t) = \mathrm{e}^{at}\cos bt}\,;\ \alpha_2 = a - \mathrm{i}b : \boxed{y_2(t) = \mathrm{e}^{at}\sin bt}$$

Obecné řešení (homogenní) lineární diferenciální rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty pak má tvar

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \mathrm{e}^{at}\left(C_1\cos bt + C_2\sin bt\right)}$$

$C_1, C_2 \in \mathrm{R}$ jsou **integrační konstanty**, jejichž konkrétní hodnoty se určí z **počátečních podmínek** úlohy.

Kořeny „naší“ charakteristické rovnice **(1.3)** – jde o výše diskutovaný případ **3** pro $D < 0$ - lze zapsat jako $\alpha_{1,2} = \pm i\omega_0 = (a \pm ib) \Rightarrow a = 0,\ b = \omega_0$.

Fundamentální systém řešení rovnice **(1.2)** je tedy tvořen funkcemi $y_1(t) = \cos\omega_0 t$ a $y_2(t) = \sin\omega_0 t$; **obecné řešení** pohybové rovnice **volně** kmitajícího mechanického oscilátoru má tedy tvar

$$y(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t \qquad \textbf{(1.4)}$$

Bez újmy na obecnosti tohoto výrazu nyní položme

$$C_1 = y_m \sin\varphi_0\ ; C_2 = y_m \cos\varphi_0\ ;\ y_m, \varphi_0 \in \mathrm{R}.$$

Dosadíme-li nyní toto jiné ale stejně obecné vyjádření integračních konstant C_1, C_2 jinými (pouze co do označení integračními konstantami y_m a φ_0) do **(1.4)**, obdržíme

$$y(t) = y_m \sin\varphi_0 \cos\omega_0 t + y_m \cos\varphi_0 \sin\omega_0 t$$

a odtud pomocí součtového vzorce pro goniometrické funkce dále dostaneme

$$y(t) = y_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad \textbf{(1.5)}$$

Obdrželi jsme tedy obecné řešení pohybu mechanického oscilátoru, na nějž působí **pouze** elastická síla ve tvaru **základní rovnice harmonického pohybu** – vyjádření časové závislosti souřadnice koncového bodu vektoru $\vec{y}(t)$ jeho okamžité výchylky.

Integrační konstanta y_m představuje hodnotu **amplitudy výchylky** oscilátoru a integrační konstanta φ_0 je **počáteční fází** jeho **harmonického** pohybu.

Časové závislosti souřadnic koncových bodů vektoru $\vec{v}(t)$ okamžité rychlosti a $\vec{a}(t)$ okamžitého zrychlení harmonicky kmitajícího oscilátoru získáme jako **první**, resp. **druhou** časovou **derivaci** vztahu **(1.5)**. Je tedy

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[y(t)] \Rightarrow \qquad v(t) = \omega_0 y_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = v_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

a

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[y(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[v(t)] \Rightarrow \qquad a(t) = -\omega_0^2 y_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

V těchto vztazích je $v_m = \omega_0 y_m$ amplituda **rychlosti** a $a_m = \omega_0^2 y_m = \omega_0 v_m$ amplituda **zrychlení** harmonického pohybu oscilátoru, popsaného rovnicí **(1.5)**. Připomeňme dále, že $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0 = \sqrt{k/m}$ je **vlastní úhlová frekvence** oscilátoru;

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ resp. } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

je jeho vlastní (prostá) **frekvence**, resp. vlastní **perioda** jeho **volných** kmitů.

VOLNÉ TLUMENÉ KMITÁNÍ

Uvažujme nyní pohyb mechanického oscilátoru (m), na nějž působí kromě **elastické** síly $\vec{F}_\mathrm{p} = k_1\vec{y}$ ještě síla $\vec{F}_\mathrm{o} \uparrow\downarrow \vec{v}$ **odporující jeho pohybu**, kterou budeme **modelovat** jako (co do velikosti) přímo úměrnou velikosti v rychlosti $\vec{v}$ oscilátoru $\Rightarrow \vec{F}_\mathrm{o} = -\,k_2\vec{v}$; $k_2 > 0\,;\,[k_2] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Zkoumejme nyní jak se působení této síly – **tlumení** – projeví na pohybu oscilátoru.

Celková síla $\vec{F}$ působící na oscilátor je vektorovým součtem **elastické** a **tlumící** síly a tedy

$$\vec{F} = \vec{F}_\mathrm{p} + \vec{F}_\mathrm{o} = -k_1\vec{y} - k_2\vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\,k_1\vec{y} - k_2\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}}$$

Vektorová podoba **pohybové rovnice tlumeného** oscilátoru má tedy tvar

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2} = -\,k_1\vec{y} - k_2\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_2}{m}\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} + \frac{k_1}{m}\vec{y} = \vec{0}\,. \qquad \textbf{(1.6)}$$

Položme nyní tak jako v předchozím článku $k_1/m = \omega_0^2$ a dále $k_2/m = 2\delta$; ω_0 je **vlastní úhlová frekvence volně** kmitajícího oscilátoru a $\delta\,;[\delta] = \mathrm{s}^{-1}$ je tzv. **součinitel tlumení**.

Skalární (**složkový**, souřadnicový) tvar **pohybové rovnice** - vztahu **(1.6)**

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = 0} \qquad \textbf{(1.7)}$$

je opět (obyčejnou) homogenní lineární diferenciální rovnicí 2.řádu s konstantními koeficienty.

Charakteristická rovnice příslušející rovnici **(1.7)** – srovnej str.40 – je

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0\,, \qquad \textbf{(1.8)}$$

jejímž diskriminantem je výraz

$$\mathrm{D} = 4\left(\delta^2 - \omega_0^2\right).$$

Následující postup vyžaduje diskusi hodnoty diskriminantu.

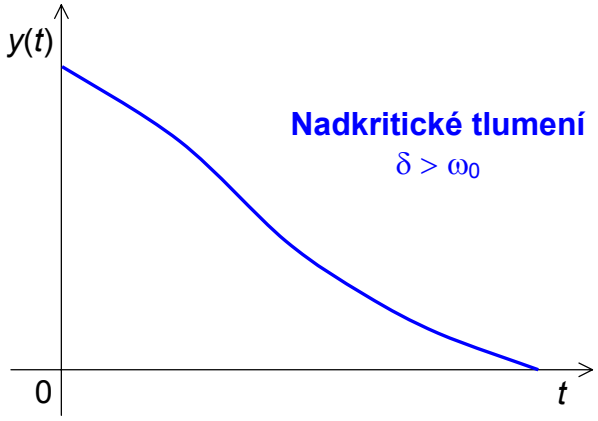
A. Platí-li $\delta > \omega_0$, je $\mathrm{D} > 0$ a $\delta^2 - \omega_0^2 > 0$; charakteristická rovnice **(1.8)** má proto dva různé **reálné** kořeny

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\,2\delta \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2} \Rightarrow \alpha_{1,2} = -\,\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \in R\,.$$

Oba kořeny jsou **reálná** (záporná) čísla a fundamentální systém řešení rovnice **(1.7)** je tvořen funkcemi $y_1(t) = \mathrm{e}^{\left(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t}$ a $y_2(t) = \mathrm{e}^{\left(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t}$. Obecné řešení této rovnice volných tlumených kmitů má v tomto případě tvar

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\left(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t} + C_2\,\mathrm{e}^{\left(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t} \qquad \textbf{(1.9)}$$

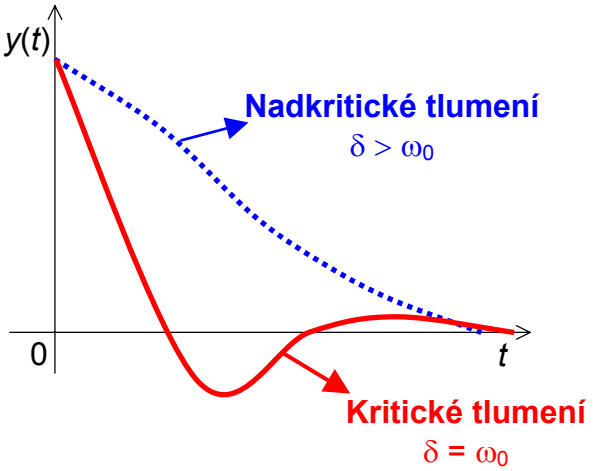
Tato situace nastává při tzv. **nadkritickém tlumení** $(\delta > \omega_0)$ oscilátoru a krátkodobý a jednorázový pohyb **nadkriticky** tlumeného („přetlumeného“) oscilátoru z libovolné nenulové okamžité výchylky do **rovnovážné** polohy je v tomto případě **aperiodický** (a samozřejmě **neharmonický**) – viz obrázek.



B. Platí-li $\delta = \omega_0$, je $D = 0$ a charakteristická rovnice má **dvojnásobný** (reálný) kořen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -\delta\,(< 0)$ a fundamentální systém řešení rovnice **(1.7)** je tvořen funkcemi $y_1(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}$ a $y_2(t) = t\,\mathrm{e}^{-\delta t}$. Obecné řešení této rovnice volných tlumených kmitů má v tomto případě tvar

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-\delta t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{-\delta t} \qquad \textbf{(1.10)}$$

Tato situace $(\delta = \omega_0)$ odpovídá tzv. **kritickému tlumení**, při němž se oscilátor opět pohybuje **aperiodicky** a neharmonicky. Přibližuje se však rovnovážné poloze **rychleji** než při tlumení **nadkritickém**.



C. Platí-li $\delta < \omega_0$, je $D < 0$ a charakteristická rovnice má dva různé **komplexní** (komplexně sdružené) kořeny

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \sqrt{(-1)\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)} = -\delta \pm \sqrt{i^2\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)} \Rightarrow$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega'\,;\ \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Fundamentální systém řešení rovnice **(1.7)** je tvořen funkcemi $y_1(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\cos\omega' t$ a $y_2(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega' t$. Obecné řešení této rovnice volných tlumených kmitů má v tomto případě tvar

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos\omega' t + C_2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega' t\,. \qquad \textbf{(1.11)}$$

Postupem stejným jako v případě **volných** kmitů oscilátoru (str.40) můžeme tento výraz upravit na tvar

$$y(t) = y_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega' t + \varphi) \qquad \textbf{(1.12)}$$

Z výsledků je patrné, že při tzv. **podkritickém tlumení** $(\delta < 0)$ je volné tlumené kmitání oscilátoru **periodické** a **harmonické**.

1. **Vlastní** úhlová frekvence ω' **volně** a **tlumeně** kmitajícího oscilátoru je rovna $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ a odtud $T' = 2\pi/\omega' = 2\pi\Big/\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Platí také $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$ - **tlumeně** kmitající oscilátor kmitá „lenivěji“ než v případě **volného** kmitání.

2. Amplituda $y'_\mathrm{m}(t) = y_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{-\delta t}$ **volně** a **tlumeně** kmitajícího oscilátoru postupně (exponenciálně) klesá, takže se jeho (tlumené) kmitání po určitém čase zcela **utlumí**.

Poměr (hodnot) libovolných dvou sousedních amplitud výchylky téhož smyslu (mezi nimiž uplyne perioda T' je roven $\mathrm{e}^{-\delta T'}$. Přirozený logaritmus tohoto výrazu nazýváme **logaritmický dekrement útlumu** (označení Λ); platí $\Lambda = \ln \mathrm{e}^{-\delta T'} \Rightarrow$

$$\Lambda = -\delta T'$$

NUCENÉ HARMONICKÉ KMITY

Na harmonický oscilátor může kromě **elastické** síly $\vec{F}_p(t) = -k_1 y(t)$ a **tlumící** síly $\vec{F}_o(t) = -k_2 v(t)$ působit také **budicí síla** $\vec{F}_b(t)$, jejíž časový průběh je takový, jaký mají mít v **ustáleném** stavu **nucené** (vynucené, buzené) kmity tohoto oscilátoru.

Uvažujme pro jednoduchost, že časový průběh **budicí** síly je **harmonický** a je popsán rovnicí

$$F_b(t) = F_{b,m} \sin \Omega t \,.$$

Za předpokladu, že všechny síly působící na oscilátor jsou rovnoběžné, je jejich výslednicí časově proměnná síla

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_p(t) + \vec{F}_o(t) + \vec{F}_b(t) \Rightarrow \; F(t) = -k_1 y(t) - k_2 \frac{dy(t)}{dt} + F_{b,m} \sin \Omega t \,.$$

Stejným postupem jako v předchozích případech obdržíme i nyní **pohybovou rovnici** oscilátoru s novou konstantou $\beta_m = F_{b,m}/m > 0$ a již dříve pojmenovanými konstantami (ω_0, δ) ve tvaru

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -k_1 y(t) - k_2 \frac{dy(t)}{dt} + F_{b,m} \sin \Omega t \Rightarrow \; \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k_2}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k_1}{m} y = \frac{F_{b,m}}{m} \sin \Omega t \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \beta_m \sin \Omega t} \qquad \textbf{(1.13)}$$

Tato pohybová rovnice je opět obyčejnou lineární diferenciální rovnicí 2.řádu s konstantními koeficienty, je však - ve srovnání s rovnicemi **(1.1)** a **(1.7)** rovnicí **nehomogenní** – na její pravé straně již není **nula**, nýbrž **funkce** času $\beta_m \sin \Omega t$.

Obecné řešení obyčejné **nehomogenní** lineární diferenciální rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty má tvar

$$\boxed{y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t)}, \qquad \textbf{(1.14)}$$

kde C_1, C_2 jsou integrační konstanty, $y_1(t)$ a $y_2(t)$ jsou funkce, tvořící **fundamentální systém řešení** (homogenní) rovnice **(1.7)** příslušející rovnici **(1.13)** a $y_p(t)$ je **partikulární** (**částečné**) **řešení** rovnice **(1.13)** pro $C_1 = C_2 = 0$, jehož konkrétní tvar závisí na konkrétním tvaru **pravé** strany rovnice **(1.13)**.

Na **pravé** straně **nehomogenní** rovnice může být obecně jakákoliv funkce, jejíž proměnnou je v našem případě čas t. V řadě případů však má tato funkce jistý **speciální** tvar; říkáme potom, že jde o nehomogenní rovnici se **speciální pravou stranou**. **Obecně** můžeme tuto speciální pravou stranu **nehomogenní** rovnice zapsat jako

$$\boxed{F(t) = e^{at}\left[P(t)\cos bt + Q(t)\sin bt\right]} \qquad \textbf{(1.15)}$$

Ve vyjádření funkce $F(t)$ jsou $a,b \in \mathrm{R}$, $P(t)$ je mnohočlen $p-$tého stupně, $Q(t)$ je mnohočlen $q-$tého stupně (připouštíme i případ $P(t)\equiv 0$, resp. $Q(t)\equiv 0$ - nikoliv však **současně**). Označme jako s **větší** z čísel p,q.

1. Nechť (obecně) komplexní číslo $a+\mathrm{i}b$ **není** řešením **charakteristické** rovnice homogenní diferenciální rovnice **(1.7)**, příslušející (nehomogenní) rovnici **(1.13)**. Pak **partikulární** řešení $y_\mathrm{p}(t)$ v obecném řešení **(1.14)** má tvar

$$y_\mathrm{p}(t) = \mathrm{e}^{at}\left[R(t)\cos bt + S(t)\sin bt\right] \qquad \textbf{(1.16a)}$$

V tomto vyjádření jsou $R(t)$ a $S(t)$ mnohočleny $s-$tého stupně. Koeficienty těchto mnohočlenů lze určit metodou neurčitých součinitelů – **dosazením** $y_\mathrm{p}(t)$ v příslušných derivacích do rovnice **(1.13)** a porovnáním koeficientů u stejných mocnin t (stejných goniometrických funkcí) na levé a pravé straně této rovnice.

2. Komplexní číslo $a+\mathrm{i}b$ **je** řešením **charakteristické** rovnice homogenní diferenciální rovnice **(1.7)**, příslušející (nehomogenní) rovnici **(1.13)**. Pak **partikulární** řešení $y_\mathrm{p}(t)$ v obecném řešení **(1.14)** má tvar

$$\boxed{y_\mathrm{p}(t) = t\,\mathrm{e}^{at}\left[R(t)\cos bt + S(t)\sin bt\right]}, \qquad \textbf{(1.16b)}$$

kde $R(t)$ a $S(t)$ jsou opět mnohočleny $s-$tého stupně.

Vrátíme se nyní k našemu problému – **nuceným** kmitům **tlumeného** (δ) **harmonického** oscilátoru (m,k), jehož **vlastní** frekvence je ω_0.

Pravá strana pohybové rovnice **(1.13)** těchto kmitů má speciální tvar $F(t) = \beta_\mathrm{m}\sin\Omega t$, který nyní porovnáme s obecnou podobou **(1.15)** speciální pravé strany, abychom určili příslušné hodnoty. Platí tedy

$$\beta_\mathrm{m}\sin\Omega t = \mathrm{e}^{0\cdot t}\left(0\cdot\cos\Omega t + \beta_\mathrm{m}\sin\Omega t\right) = \mathrm{e}^{at}\left[P(t)\cos bt + Q(t)\sin bt\right] \Rightarrow$$

$$a = 0,\ b = \Omega;\ p = q = 0,\ s = 0;\ a+\mathrm{i}b = \mathrm{i}\Omega\,. \qquad \textbf{(1.17)}$$

Srovnáme-li komplexní číslo $a+\mathrm{i}b = \mathrm{i}\Omega$ s řešeními charakteristické rovnice **(1.8)** příslušející levé straně (homogenní části) rovnice **(1.13)** zjistíme, že toto číslo $(i\Omega)$ není řešením charakteristické rovnice v žádném z případů **A**,**B**,**C** diskutovaných na str.41 až 43. Proto můžeme **partikulární** řešení $y_\mathrm{p}(t)$ rovnice **(1.13)** zapsat ve tvaru

$$y_\mathrm{p}(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\,, \qquad \textbf{(1.18)}$$

v němž A a B jsou mnohočleny $s-$tého - tedy nultého stupně – jsou to tedy zatím neurčené (nikoliv integrační) reálné **konstanty**.

Metoda neurčitých koeficientů umožňující určení zatím neznámých konstant A a B vychází z předpokladu o tom, že má-li být funkce **(1.18)** partikulárním řešením rovnice **(1.13)**, musí této rovnici vyhovovat. Postupujeme tedy tak, že funkci **(1.18)** a její příslušné derivace do rovnice **(1.13)** dosadíme.

Vypočtěme nejdříve první a druhou časovou derivaci funkce **(1.18)**. Platí

$$\frac{dy_p}{dt} = \dot{y}_p = -A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t\,, \quad \frac{d^2y_p}{dt^2} = \ddot{y}_p = -A\Omega^2\cos\Omega t - B\Omega^2\sin\Omega t\,.$$

Po dosazení funkce **(1.18)** a jejich derivací do rovnice **(1.13)** dostaneme

$$-A\Omega^2\cos\Omega t - B\Omega^2\sin\Omega t + 2\delta\left(-A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t\right) +$$
$$+\omega_0^2\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) = \beta_m\sin\Omega t \Rightarrow$$
$$\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)B - 2\delta\Omega A\right]\sin\Omega t + \left[2\delta\Omega B + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)A\right]\cos\Omega t = \beta_m\sin\Omega t\,.$$

Srovnáme-li nyní **neurčité** koeficienty u goniometrických funkcí na **levé** straně této rovnice se **známými** koeficienty u **stejných** goniometrických funkcí na **pravé** straně této rovnice, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *A* a *B*

$$\begin{aligned}\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)A + 2\delta\Omega B &= 0\\ -2\delta\Omega A + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)B &= \beta_m\,.\end{aligned} \qquad \textbf{(1.19)}$$

Řešením této soustavy rovnic obdržíme

$$A = \frac{-2\delta\Omega\beta_m}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}\,,\; B = \frac{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\beta_m}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}\,. \qquad \textbf{(1.20)}$$

Zapišme nyní tvar hledaného partikulárního řešení **(1.18)** v poněkud jiné podobě jako

$$y_p = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t = Y_m\sin\Phi\cos\Omega t + Y_m\cos\Phi\sin\Omega t \Rightarrow$$
$$\boxed{y_p = Y_m\sin\left(\Omega t + \Phi\right).} \qquad \textbf{(1.21)}$$

Ze srovnání příslušných členů v těchto vztazích dostaneme

$$A = Y_m\sin\Phi\,,\; B = Y_m\cos\Phi \Rightarrow\; Y_m = \sqrt{A^2 + B^2}\,,\; \mathrm{tg}\,\Phi = \frac{A}{B}.$$

Dosadíme-li do těchto výrazů vyjádření koeficientů *A* a *B* **(1.20)**, dostaneme

$$Y_m = \sqrt{\frac{4\delta^2\Omega^2\beta_m^2}{\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^2} + \frac{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2\beta_m^2}{\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{Y_m = \frac{\beta_m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}} \qquad \textbf{(1.22)}$$

$$\mathrm{tg}\,\Phi = \frac{\dfrac{-2\delta\Omega\beta_m}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}{\dfrac{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\beta_m}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{tg}\,\Phi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}} \qquad \textbf{(1.23)}$$

Uvažujeme případ **podkritického** tlumení oscilátoru (**C**, str.43), kdy obecné řešení homogenní pohybové rovnice volných tlumených kmitů má tvar **(1.11)**. V tomto případě můžeme **úplné obecné řešení nehomogenní** rovnice **(1.13)** - pohybové rovnice **nucených tlumených kmitů** zapsat ve tvaru

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = C_1\, e^{-\delta t} \cos \omega' t + C_2\, e^{-\delta t} \sin \omega' t + Y_m \sin(\Omega t + \Phi) \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = y_m\, e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \varphi) + Y_m \sin(\Omega t + \Phi).} \qquad \textbf{(1.24)}$$

Ve vztahu **(1.24)** jsou y_m a φ **integrační konstanty** které se určí z počátečních podmínek pohybu, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ je vlastní úhlová frekvence **volně** a **tlumeně** kmitajícího oscilátoru (ω_0 je vlastní úhlová frekvence **volně** – a harmonicky - kmitajícího oscilátoru).

Veličiny Y_m, resp. Φ určené vztahy **(1.22)**,resp. **(1.23)** **nejsou** integračními konstantami - jejich hodnoty závisí na vlastnostech **oscilátoru** (m, ω_0), součiniteli **tlumení** (δ) a na vlastnostech **budicí síly** $(F_{b,m}, \Omega)$.

První část obecného řešení **(1.24)** rovnice **(1.13)** vystihuje volné tlumené kmitání exponenciálně se zmenšující s časem a představuje tedy pouhé **přechodné** jevy, které se před utlumením sčítají s **nucenými** kmity. Po určitém časovém intervalu, potřebném k zániku volných tlumených kmitů, koná tedy oscilátor pouze **nucené harmonické kmity** s amplitudou výchylky Y_m a úhlovou frekvencí Ω.

Diskutujme nyní podrobněji hodnotu amplitudy výchylky Y_m a jejího fázového posunutí Φ proti amplitudě $F_{b,m}$ (velikosti) budicí síly.

Napišme proto ještě jednou vztah **(1.22)** pro amplitudu výchylky Y_m nucených kmitů

$$Y_m = \frac{\beta_m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{F_{b,m}}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \qquad \textbf{(1.22a)}$$

1. Amplituda Y_m nucených kmitů je **přímo úměrná** amplitudě $F_{b,m}$ budicí síly a **nepřímo úměrná** hmotnosti m oscilátoru

2. Amplituda Y_m nucených kmitů je tím **větší**, čím **menší** je rozdíl mezi frekvencí Ω budicí síly a vlastní frekvencí ω_0 oscilátoru a čím **menší** je (součinitel) tlumení (δ).

3. Amplituda Y_m nucených kmitů je (při daném tlumení) **maximální** pro takovou úhlovou frekvenci budící síly, při níž je jmenovatel vztahu **(1.22a)** **minimální**. Určíme nyní tuto minimální hodnotu jmenovatel běžným matematickým postupem - hledáním lokálního extrému funkce

$$f(\Omega) = \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2 .$$

$$\frac{df}{d\Omega} = 2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)(-2\Omega) + 8\delta^2\Omega = 0 \Rightarrow \; -4\Omega\left(\omega_0^2 - 2\delta^2 - \Omega^2\right) = 0 . \qquad \textbf{(1.25)}$$

Vztah **(1.25)** představuje **kubickou** rovnici, která má (pro $\omega_0 > 2\delta$) **tři různé reálné** kořeny $\Omega_1 = 0, \Omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$. Z hlediska dané úlohy má pro nás význam pouze kořen $\Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, pro nějž – jak bychom se lehce přesvědčili dalším matematickým postupem – nabývá jmenovatel vztahu **(1.22a)** **minimální** hodnoty.

Všimněme si přitom, že Ω_2 je tím menší než vlastní frekvence ω_0 oscilátoru, čím větší je součinitel tlumení δ.

Dosadíme-li hodnotu $\Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ (za Ω) do vztahu **(1.22a)**, dostaneme.

$$Y_{\mathrm{m,max.}} = \frac{F_{\mathrm{b,m}}}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2\right)^2 + 4\delta^2\left(\omega_0^2 - 2\delta^2\right)}} = \frac{F_{\mathrm{b,m}}}{m\sqrt{4\delta^2\omega_0^2 - 4\delta^4}} \Rightarrow$$

$$\boxed{Y_{\mathrm{m,max.}} = \frac{F_{\mathrm{b,m}}}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_{\mathrm{b,m}}}{2m\delta\omega'};} \qquad \textbf{(1.26)}$$

kde $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ je úhlová frekvence (tlumených) kmitů, které by oscilátor konal, kdyby na něj nepůsobila budicí síla (srovnej str.43).

Tento v praxi velmi důležitý případ, kdy má budicí síla takovou frekvenci (Ω_2), že amplituda nucených kmitů oscilátoru dosahuje **maxima**, nazýváme **rezonance** (přesněji **amplitudová rezonance**) mezi vlastními kmity oscilátoru a budicí silou.

Pokud by **nedocházelo** k **tlumení** oscilátoru $(\delta = 0)$, nabývala by amplituda výchylky jeho nucených kmitů maxima pro $\Omega_2 = \omega_0$ a rostla by nade všechny meze, neboť

$$\lim_{\delta\to 0} Y_{\mathrm{m,max.}} = \lim_{\delta\to 0} \frac{F_{\mathrm{b,m}}}{2m\delta\omega'} = \frac{F_{\mathrm{b,m}}}{2m\omega_0} \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} = \infty .$$

Nekonečně velkých hodnot by ovšem amplituda nucených kmitů dosáhla až po uplynutí nekonečně dlouhého časového intervalu, neboť periodicky proměnná budící síla konečné amplitudy $F_{\mathrm{b,m}}$ své velikosti by musela oscilátoru dodat **nekonečnou** energii. V praxi se s tímto případem nesetkáme, protože **vždy existuje** velmi malé tlumení, takže $\delta > 0$.

Všimněme si nyní **fázového posunutí** Φ nucených kmitů oscilátoru a budicí síly, která je způsobuje. Ze vztahu **(1.23)**

$$\mathrm{tg}\,\Phi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

je patrné, že **roste-li** úhlová frekvence Ω budicí síly od hodnoty $\Omega = 0$, nabývá úhel Φ **záporných** hodnot – jedná se tedy vždy o fázové **zpoždění** nucených kmitů vzhledem k budicí síle. Pro $\Omega = \omega_0$ je $\Phi = -\pi/2$ a pro $\Omega \to \infty$ se toto fázové zpoždění Φ blíží $-\pi$.

Při rezonanci amplitudy je $\Omega = \Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ a pro fázové posunutí Φ_r pak platí

$$\operatorname{tg}\Phi_r = -\frac{2\delta\Omega_2}{\omega_0^2 - \Omega_2^2} = -\frac{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\Phi_r = -\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\delta}}.$$

2. MECHANICKÉ VLNĚNÍ

VZNIK A VLASTNOSTI POSTUPNÉHO VLNĚNÍ

Sousední částice **látkového** prostředí můžeme považovat za **vázané mechanické oscilátory**, jejichž tuhost je shodná s tuhostí vzájemné **vazby**, neboť společnou příčinou obou těchto tuhostí je **vzájemné silové působení částic**. Makroskopickým modelem těchto částic - vázaných mechanických oscilátorů - může být např. soustava kovových kuliček, z nichž každá je s nejbližšími sousedními kuličkami spojena stejnými pružinami.

Vyvoláme-li v takovém (původně klidném) látkovém prostředí **rozruch** tím, že rozkmitáme jednu částici, přenáší se díky vazbám tento **kmitavý** pohyb i na částice s ní bezprostředně sousedící a ty jej zase předávají dalším částicím ve svém okolí. Část látkového prostředí kolem místa původního rozruchu, do níž během času dorazí (postoupí) takto se šířící kmitavý pohyb jeho částic, se tedy postupně zvětšuje.

Tomuto zvláštnímu druhu mechanického pohybu, při němž se látkovým prostředím z místa rozruchu všemi směry šíří - postupuje - kmitavý pohyb jeho částic a nedochází k přenosu látky, říkáme **postupné vlnění**.

Název **vlnění** souvisí např. s naší zkušeností při házení kamínků na klidnou hladinu vody v kaluži, rybníku apod. V místě dopadu kamínku se na hladině začnou tvořit vlny ve tvaru soustředných kružnic, jejichž poloměr se postupně zvětšuje. Dopad kamínku nevyvolá proudění vody ani (podélný) posuvný pohyb předmětů plovoucích na vodní hladině, je však **rozruchem**, jehož šíření vlněním můžeme na vodní hladině velmi dobře pozorovat.

V části věnované **kmitání** jsme se dozvěděli, že při vzájemné vazbě si kmitající oscilátory předávají mechanickou energii. Postupným vlněním, šířícím se soustavou vázaných mechanických oscilátorů - částic látkového prostředí, se tedy tímto prostředím **šíří** (přenáší, postupuje) **mechanická energie**.

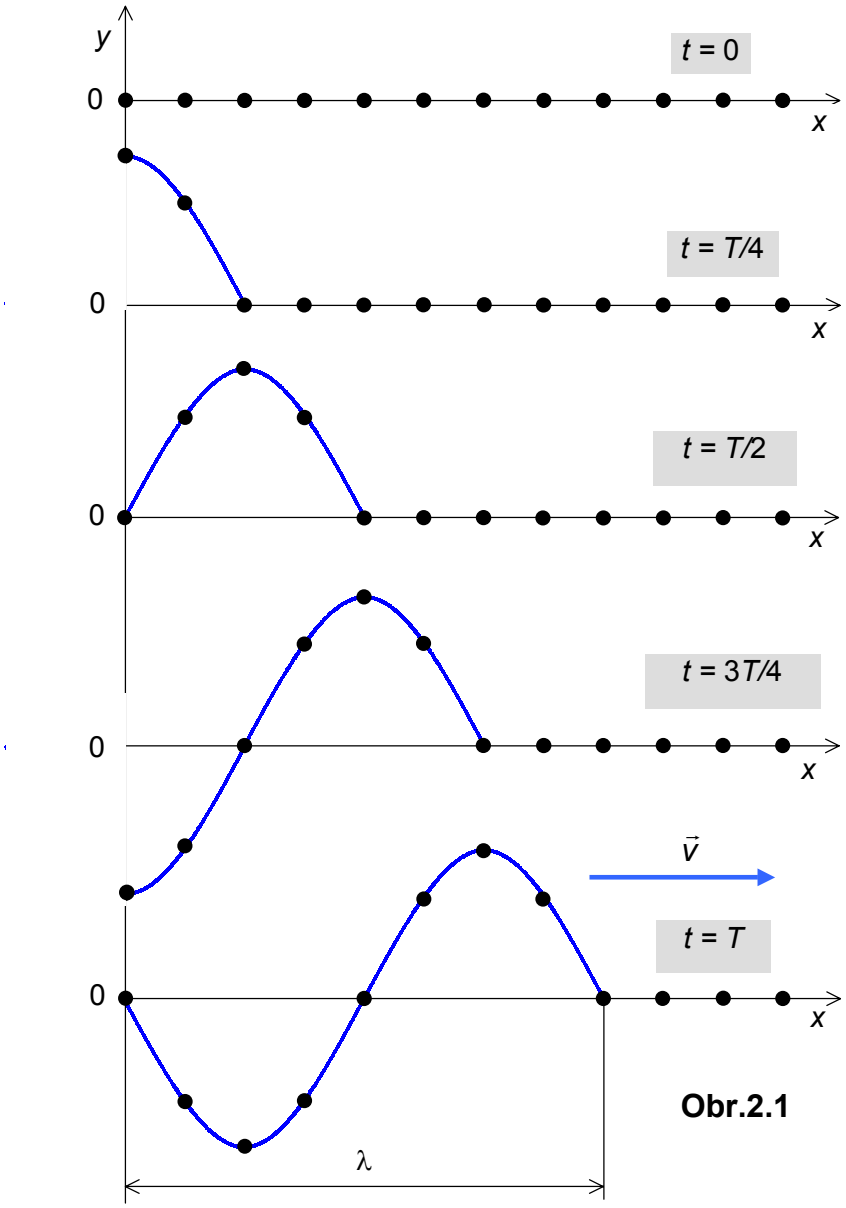
Následkem **tlumení** kmitajících částic se část mechanické energie během jejího přenosu vlněním mění ve vnitřní energii látkového prostředí, kterým se vlnění šíří. Tomuto jevu říkáme **pohlcování** neboli **absorpce** vlnění v látkovém prostředí. V důsledku absorpce se postupné vlnění v určité vzdálenosti od svého zdroje (místa původního rozruchu) zcela utlumí. Ke zvlášť výrazné absorpci vlnění dochází zejména v látkách, které nejsou pružné a v nichž je vazba mezi sousedními částicemi velmi slabá (např. polystyrén, vlna, vata, textilie apod.).

Matematický popis postupného vlnění je nejjednodušší, zvolíme-li si v látkovém prostředí pouze ty jeho částice (hmotné body), které před vznikem vlnění leží na **téže přímce** – tvoří tedy tzv. **bodovou řadu**. Takový výběr částic můžeme modelovat např.nataženou vodorovnou pryžovou hadicí, jejíž jeden konec je upevněn. Uvedeme-li její volný konec do svislého kmitavého pohybu, můžeme šíření tohoto rozruchu hadicí - "bodovou řadou" - postupným vlněním dobře pozorovat.

Na **obr.2.1** je znázorněno několik částic látkového prostředí, tvořících před vznikem vlnění bodovou řadu, ležící v ose x pravoúhlé soustavy souřadnic.

Předpokládejme, že rozruchem v této řadě bodů je k ní kolmý (příčný) **harmonický** pohyb krajního bodu kolem rovnovážné polohy, ležící v počátku soustavy souřadnic.

Časovou závislost okamžité výchylky tohoto bodu lze vyjádřit základní rovnicí $y(t) = y_m \sin \omega t$.



Obr.2.1

Postup vlnění bodovou řadou lze popsat **rychlostí** v pohybu některé (libovolně vybrané) **fáze** tohoto harmonického pohybu, do něhož jsou díky vzájemným vazbám postupně uváděny stále další a další hmotné body řady. Této rychlosti šíření **určité fáze** rozruchu říkáme proto **fázová rychlost** postupného vlnění.

Má-li vlnění fázovou rychlost o velikosti v a postupuje-li v kladném směru osy x, dorazí (tatáž fáze harmonického pohybu) z počátku do bodu o **souřadnici** x za časový interval $t' = x/v$. Je-li počáteční fáze kmitání krajního bodu (rozruchu) nulová a zanedbáme-li absorpci vlnění v látkovém prostředí, má vlněním vyvolaný harmonický pohyb bodu o souřadnici x rovnici

$$y(x,t) = y_m \sin \omega (t - t') = y_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Okamžitá výchylka harmonického pohybu bodů řady, vyvolaného postupem vlnění, je tedy závislá nejen na čase, ale i na jejich poloze vzhledem k rozruchu (zdroji), z něhož se vlnění šíří.

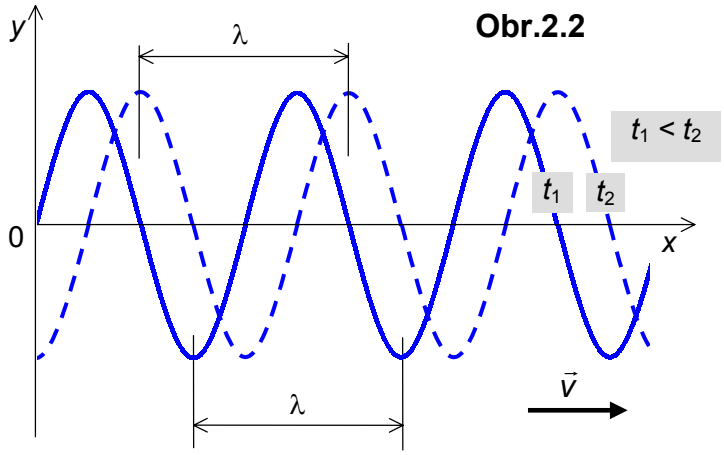
Úhlová frekvence ω harmonického pohybu částic látkového prostředí je současně i úhlovou frekvencí postupného vlnění, které jej vyvolává. I vlnění má tedy **periodu** T a **frekvenci** f, pro něž platí

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Během jedné periody urazí postupné vlnění vzdálenost nazývanou **vlnová délka** λ. Je-li v velikost fázové rychlosti vlnění, pak

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\omega}v; \quad [\lambda] = \mathrm{m}.$$

Při postupu vlnění se tvar původně přímé řady bodů mění - kmitající body leží v každém okamžiku na části **sinusoidy**, která se posunuje **fázovou rychlostí** v (**obr.2.2**). Vlnová délka λ vlnění je nejmenší vzdálenost dvou bodů řady, které následkem vlnění kmitají se stejnou (jinak však libovolnou) fází.



Obr.2.2

Vyjádříme-li **frekvenci** vlnění pomocí vlnové délky jako $f = v/\lambda$, můžeme říci, že frekvence je číselně rovna počtu vlnových délek, které vlnění urazí za jednotku času.

Použitím periody T a vlnové délky λ můžeme postupné vlnění v řadě bodů popsat rovnicí:

$$y(x,t) = y_\mathrm{m} \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = y_\mathrm{m} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) \Rightarrow \quad y(x,t) = y_\mathrm{m} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Veličina x v této rovnici je **souřadnicí** bodu, jehož harmonické kmitání vyvolané vlněním má v počátečním okamžiku $(t = 0)$ nulovou fázi. Proměnnou veličinu

$$\varphi(t,x) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

nazýváme **fáze** postupného vlnění (v okamžiku t a v bodě o souřadnici x).

Připomeňme znovu, že rovnice postupného vlnění je (**periodickou**) **funkcí dvou proměnných** - času t a polohy x vzhledem k harmonicky kmitajícímu bodu $(x = 0)$, jehož fázi v okamžiku $t = 0$ známe.

Je-li okamžitá výchylka kmitavého pohybu bodů (částic) kolmá ("příčná") k vektoru fázové rychlosti vlnění, které jej vyvolalo, nazýváme toto **vlnění příčné**. Příčné vlnění vyžaduje značnou (**pružnou**) vazbu mezi částicemi látkového prostředí a může se proto šířit **pouze v látkách pevných**.

Vraťme se ještě jednou k **obr.2.1**. Kdybychom rozkmitali krajní částici bodové řady v **podélném** směru (ve směru osy x), došlo by opět postupným vlněním k přenosu tohoto rozruchu na ostatní částice bodové řady. Její částice jsou však v tomto případě uváděny do kmitavého pohybu, jehož vektor okamžité výchylky je rovnoběžný s vektorem fázové rychlosti postupného vlnění. Proto říkáme tomuto druhu postupného vlnění **vlnění podélné**.

Podélné vlnění v řadě bodů (**částic** látkového prostředí) si můžeme představit jako jejich (fázovou rychlostí postupující) periodické zhušťování a zřeďování. K šíření podélného vlnění tedy stačí i velmi **volná** vazba mezi částicemi látkového prostředí. Proto se podélné vlnění - na rozdíl od vlnění příčného - šíří i v látkách **kapalných** a **plynných**.

Matematicky lze podélné vlnění bodové řady popsat podobně jako vlnění příčné rovnicí

$$x'(x,t) = x_\mathrm{m} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

V rovnici podélného vlnění je x souřadnicí **rovnovážné polohy** bodu (částice) vzhledem k místu rozruchu (počátku soustavy souřadnic); $x'(t,x)$ je pak souřadnicí koncového bodu vektoru jeho okamžité výchylky vzhledem k jeho rovnovážné poloze (nikoliv tedy k počátku soustavy souřadnic) a x_m je amplituda výchylky jeho harmonického pohybu. Platí tedy

$$-x_\mathrm{m} \le x'(t,x) \le x_\mathrm{m};\ x'(t,x) \parallel 0x;\ \vec{x}'(t,x) \parallel \vec{v}\,.$$

ÚLOHY

1. Postupné vlnění je popsáno rovnicí $y = 0{,}10 \sin 2\pi(5t - 0{,}3x)$. Určete jeho amplitudu výchylky, vlnovou délku a fázovou rychlost. $\left[10\ \mathrm{cm};\ 3{,}3\ \mathrm{m};\ 1{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\right]$

2. Určete velikost fázové rychlosti vlnění, které má vlnovou délku $80\ \mathrm{cm}$ a postupuje z místa rozruchu (zdroje) kmitajícího s frekvencí $2{,}0\ \mathrm{Hz}$. $\left[1{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\right]$

3. Napište rovnici příčného vlnění, které má frekvenci $500\ \mathrm{Hz}$, amplitudu $2\cdot 10^{-2}\ \mathrm{mm}$ a postupuje rychlostí $340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ v kladném směru osy x.
$\left[y = 2\cdot 10^{-5} \sin 2\pi(500\,t - x/0{,}68)\right]$

4. Určete velikost fázové rychlosti, s níž postupuje vlnění o frekvenci $2{,}5\ \mathrm{Hz}$ a vlnové délce $1{,}3\ \mathrm{m}$. $\left[3{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\right]$

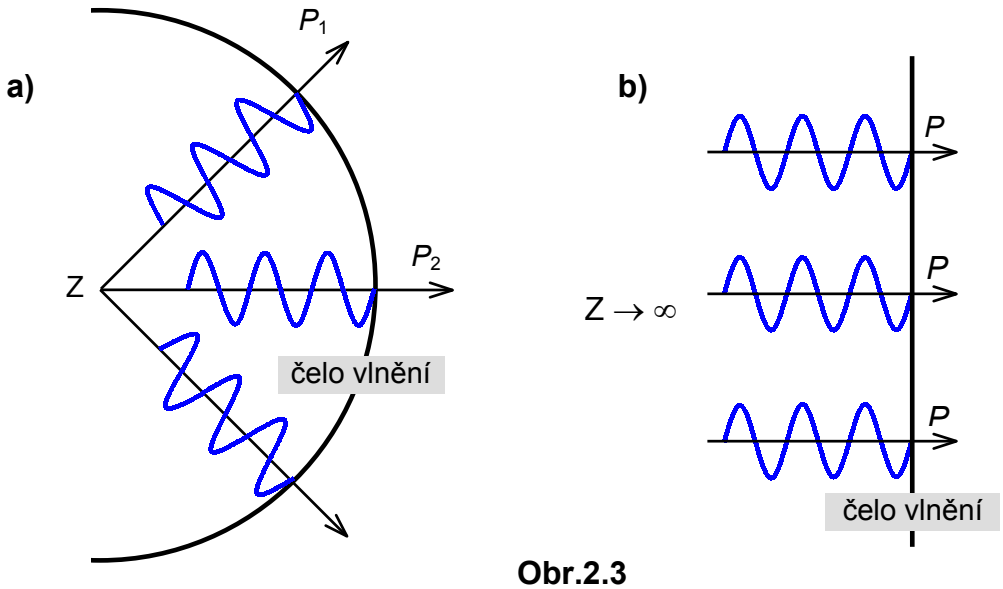
5. Určete frekvenci kmitání ladičky, která je zdrojem vlnění o vlnové délce $67\ \mathrm{cm}$ postupujícího vzduchem rychlostí $340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. $[510\ \mathrm{Hz}]$

HUYGENSŮV PRINCIP

Dopadne-li kamínek na klidnou vodní hladinu, začne se z místa dopadu šířit vlnění. Jeho postup po celé okolní hladině můžeme sledovat pozorováním neustále se zvětšující kružnice kolem místa dopadu, oddělující od sebe vlněním zasaženou a nezasaženou část vodní hladiny.

V pevných, kapalinových nebo plynných tělesech se **postupné vlnění** šíří z místa rozruchu všemi možnými směry - všemi řadami bodů (**částic** látkového prostředí), procházejícími místem rozruchu. Má-li v daném prostředí fázová rychlost vlnění ve všech těchto bodových řadách - ve všech směrech - stejnou velikost, nazýváme toto prostředí **izotropní**.

V homogenním a izotropním prostředí dorazí postupné vlnění za dobu t do vzdálenosti vt ve všech směrech od místa svého vzniku - zdroje vlnění. Částice v této vzdálenosti, které v okamžiku t právě začínají kmitat ze svých rovnovážných poloh, leží na kulové ploše o poloměru vt se středem v bodovém zdroji, z něhož se vlnění šíří. V homogenním a izotropním prostředí má tedy **čelo** vlnění postupujícího prostředím z **bodového** zdroje Z tvar **kulové vlnoplochy** (**obr.2.3a**).



Obr.2.3

Kolmice k vlnoploše, nazývané **paprsky** (P_1, P_2, P_3), určují směr šíření (směr fázové rychlosti) postupného vlnění. Ve velké vzdálenosti od zdroje vlnění $(Z \to \infty)$ můžeme část kulové vlnoplochy o velkém poloměru nahradit **rovinou** - čelo vlnění má v tomto případě tvar **rovinné vlnoplochy** a paprsky k ní kolmé jsou spolu rovnoběžné (**obr.2.3b**).

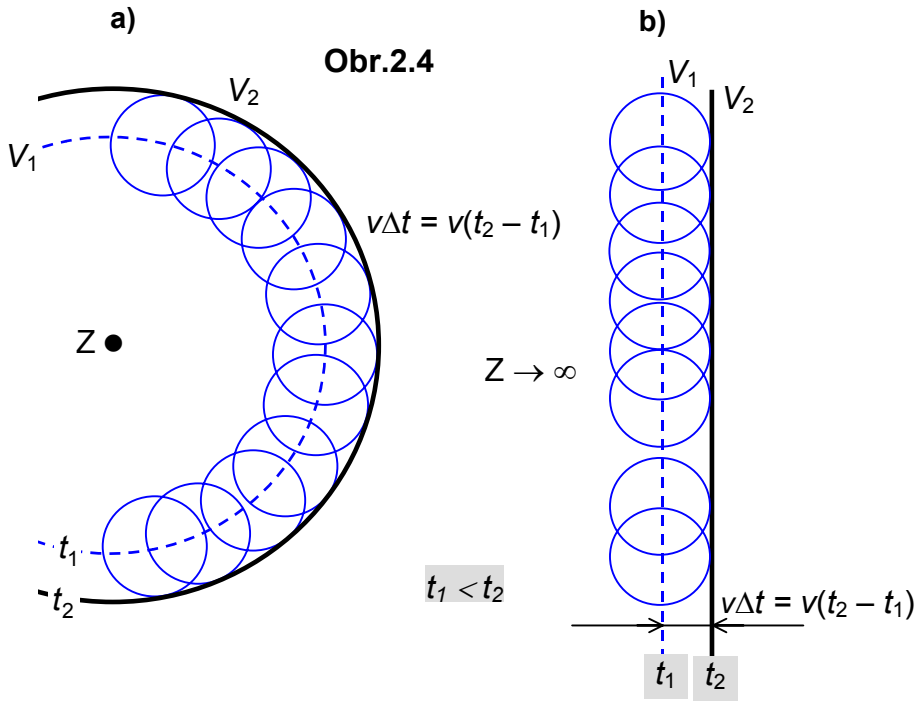
Vlnoplochou rozumíme plochu, na níž leží částice prostředí, kmitající následkem šíření vlnění se **stejnou fází**. Sousední vlnoplochy téže fáze jsou od sebe vzdáleny o vlnovou délku postupného vlnění. Na čelní vlnoploše, oddělující od sebe vlněním zasaženou a nezasaženou část prostředí, leží částice, jejichž fáze je (v daném okamžiku) nulová (částice, které právě začínají kmitat).

Známe-li polohu a tvar některé vlnoplochy v určitém okamžiku, můžeme určit další postup vlnění a řešit řadu jevů s ním souvisejících pomocí **HUYGENSOVA principu**:

Všechny body (částice), do nichž v určitém okamžiku dorazí vlnění, se stávají jeho novými tzv. **elementárními** zdroji, z nichž se od tohoto okamžiku vlnění šíří v **elementárních vlnoplochách**. Výslednou vlnoplochou vlnění je v libovolném následném okamžiku **vnější** obalová plocha všech těchto elementárních vlnoploch.

Předpokládejme, že vlnění se šíří v izotropním prostředí fázovou rychlostí v a v okamžiku t_1 má jeho čelní vlnoplocha tvar V_1 (**obr.2.4**). Čelní vlnoplochu vlnění v okamžiku $t_2 > t_1$ určíme podle **Huygensova** principu následujícím způsobem. Kolem bodů vlnoplochy V_1 sestrojíme kružnice (elementární vlnoplochy) o poloměru $v(t_2 - t_1) = v\Delta t$. **Vnější obálka** těchto kružnic je **čelní vlnoplochou** V_2 vlnění v okamžiku t_2.

Obr.2.4



POZNÁMKA

Lze matematicky dokázat, že ve všech bodech elementárních vlnoploch kromě bodů jejich **vnější** obalové plochy se vlnění tzv. **interferencí** navzájem ruší.

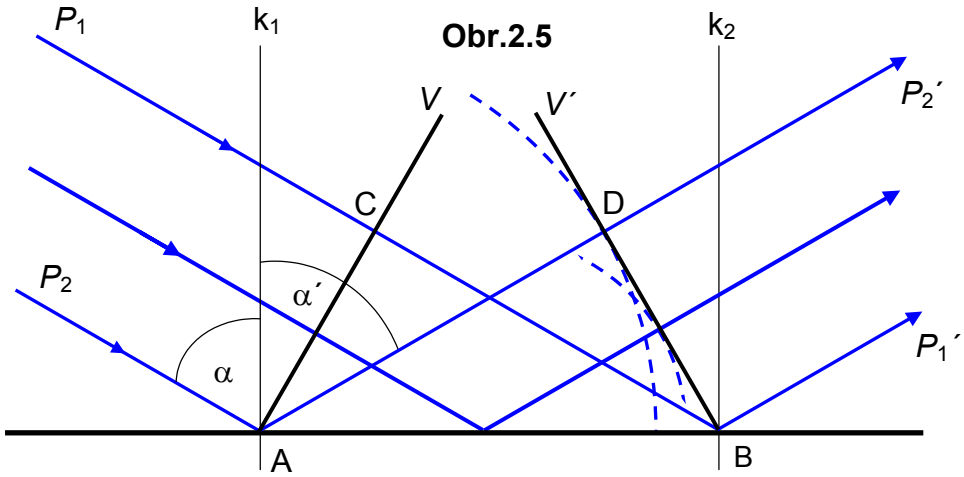
CHRISTIAN HUYGENS (hajchens) (1629 - 1695). Nizozemský fyzik a matematik. Položil základy vlnové teorie světla, vysvětlil jeho dvojlom, sestrojil dalekohled, kterým objevil v r.1655 Saturnův měsíc Titan. Zabýval se pohybem fyzického kyvadla a sestrojil kyvadlové hodiny. V matematice je pokládán za zakladatele počtu pravděpodobnosti.

ODRAZ A LOM VLNĚNÍ

Dospěje-li vlnění na rozhraní dvou různých (látkových) prostředí - narazí-li např. při šíření ve vzduchu na stěnu pevného tělesa nebo na vodní hladinu, rozdělí se obecně mechanická energie přenášená vlněním na dvě části. Jedna část této energie se **odrazem vlnění** od rozhraní (překážky) vrací zpět do prvního prostředí.

Druhá část mechanické energie projde rozhraním a vlněním o téže frekvenci se přenáší druhým prostředím. Při přechodu rozhraním dochází k jevu, jemuž říkáme **lom vlnění**.

Na **obr.2.5** je znázorněno rovinné rozhraní dvou homogenních izotropních prostředí, k němuž ve směru paprsků P_1, P_2 postupuje fázovou rychlostí v_1 rovinná vlna. Směr šíření vlnění lze vzhledem k rozhraní určit **úhlem dopadu** α mezi (libovolným) paprskem a jeho **kolmicí dopadu** k. Kolmice dopadu je přímka kolmá k rozhraní v bodě dopadu paprsku a určující spolu s ním tzv. **rovinu dopadu**. Roviny dopadu paprsků P_1, P_2 na našem obrázku jsou totožné s rovinou papíru.



V okamžiku $t = 0$, kdy vlnění dorazí do bodu A (a do bodu C), je poloha jeho čelní rovinné vlnoplochy znázorněna polopřímkou AC. Podle **HUYGENSOVA** principu se bod A v tomto okamžiku stává elementárním zdrojem vlnění, které se z něj (v prvním prostředí) šíří všemi možnými směry fázovou rychlostí o velikosti v_1.

Za dobu t, potřebnou k postupu vlnění z bodu C do bodu B, dosáhne poloměr elementární čelní kulové vlnoplochy V vlnění šířícího se z bodu A zpět do prvního prostředí hodnoty $\overline{AD} = \overline{CB} = v_1 t$. Naprosto stejným postupem bychom mohli v okamžiku t určit poloměr čelní elementární vlnoplochy kolem bodu dopadu libovolného paprsku mezi body A a B.

Výslednou vlnoplochu (V') odraženého vlnění v okamžiku t získáme podle **HUYGENSOVA** principu jako obálku elementárních vlnoploch postupujících v prvním prostředí z bodů úsečky AB. Na **obr.2.5** je tato rovinná vlnoplocha znázorněna polopřímkou BD. K ní kolmé rovnoběžné paprsky P_1', P_2', určující směr šíření **odraženého** vlnění, svírají se svými kolmicemi dopadu **úhel odrazu** α'.

Pravoúhlé trojúhelníky ABD a ABC jsou shodné (ss) a z jejich shodnosti plyne z **obr.2.5** i shodnost úhlů α a α'.

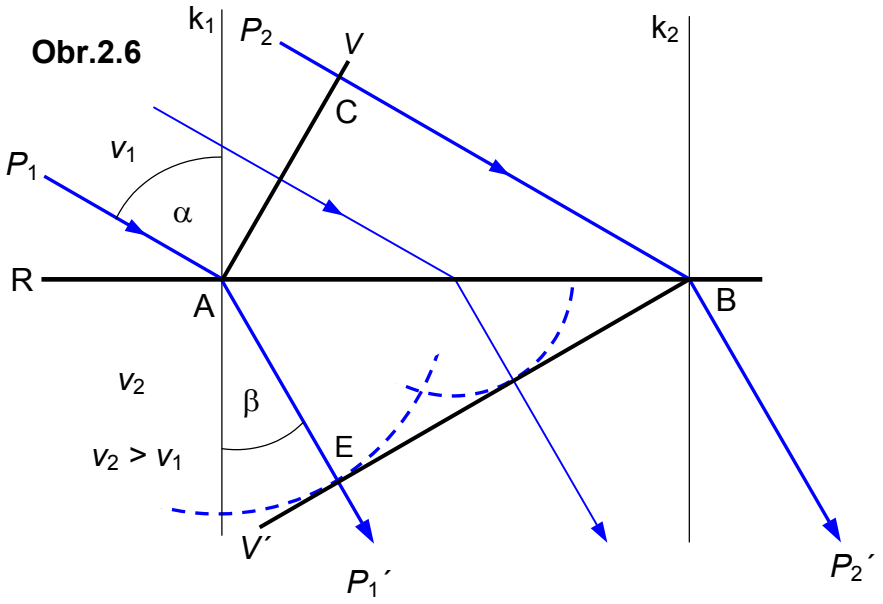
ZÁKON ODRAZU VLNĚNÍ

Úhel odrazu α' vlnění je shodný s úhlem dopadu α a odražený paprsek leží v rovině dopadu.

Věnujme nyní pozornost té části vlnění (a energie), která projde rozhraním a postupuje druhým prostředím (**obr.2.6**).

Odlišnost různých látkových prostředí vzhledem k vlnění je dána zejména tím, že se v nich vlnění šíří různě velkými fázovými rychlostmi. Má-li tedy např. fázová rychlost

vlnění ve druhém prostředí na **obr.2.6** velikost $v_2 < v_1$, má v okamžiku t čelní elementární vlnoplocha (V') vlnění postupujícího z bodu A do druhého prostředí poloměr $\overline{AE} = v_2 t < v_1 t = \overline{CB}$.



Obálkou elementárních vlnoploch postupujících z bodů úsečky AB do druhého prostředí rychlostí v_2 je výsledná rovinná vlnoplocha vlnění prošlého rozhraním - na **obr.2.6** je v okamžiku t znázorněna polopřímkou BE. Směr šíření vlnění prošlého rozhraním je dán paprsky P_1', P_2', kolmými k této vlnoploše.

Z **obr.2.6** je patrné, že vlnění při průchodu rozhraním dvou různých prostředí mění směr svého šíření - dochází k jevu nazývanému **lom vlnění**.

Mírou lomu vlnění je srovnání **úhlu dopadu** α a **úhlu lomu** β, svíraného lomeným paprskem (P_1' nebo P_2') s kolmicí dopadu k. Pravoúhlé trojúhelníky ABC a ABE mají společnou přeponu AB. Úhel α je v trojúhelníku ABC protilehlým odvěsně BC a úhel β je v trojúhelníku ABE protilehlým odvěsně AE. Proto platí:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{v_1 t}{\overline{AB}} = \sin\alpha, \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{v_2 t}{\overline{AB}} = \sin\beta.$$

Dělením těchto vztahů dostaneme matematické vyjádření zákona lomu vlnění

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = n,$$

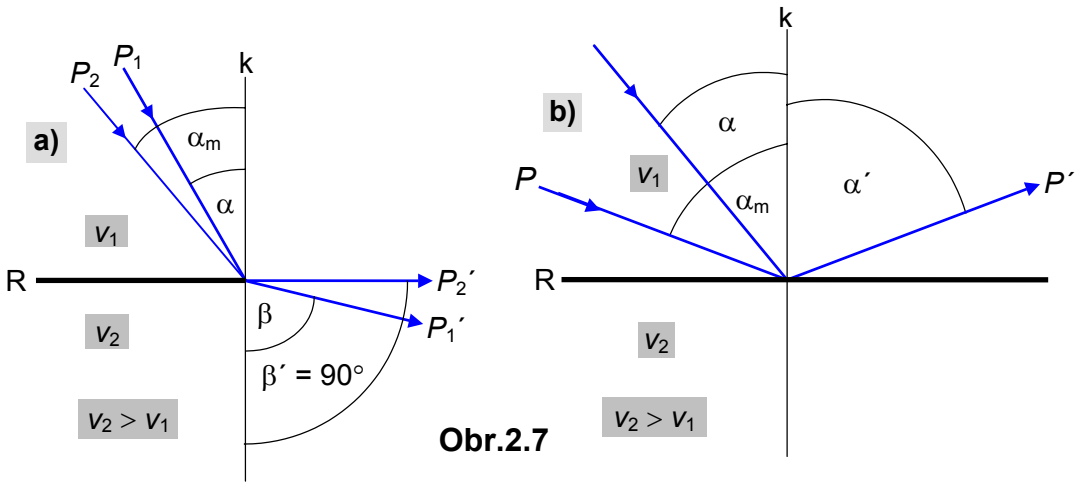
nebo slovy

Zákon lomu vlnění

Poměr sinů úhlů dopadu a lomu je vždy roven poměru rychlostí vlnění v prostředích, na jejichž rozhraní se vlnění láme. Hodnotu tohoto poměru označujeme n a nazýváme ji **indexem lomu** daných dvou prostředí. Lomený paprsek zůstává v rovině dopadu.

Je-li $v_2 < v_1$ (**obr.2.6**) – vlnění přechází z prostředí opticky **řidšího** do prostředí opticky **hustšího**, je index lomu daných dvou prostředí větší než **jedna** $(n > 1)$. V tomto případě je tedy úhel lomu vždy menší než úhel dopadu a říkáme proto, že se vlnění při průchodu rozhraním takových dvou prostředí **láme ke kolmici** (dopadu).

Odlišná situace nastává při průchodu vlnění rozhraním, oddělujícím dvě různá prostředí, v nichž se vlnění šíří rychlostmi o velikostech v_1 a $v_2 > v_1$ (**obr.2.7**). Index lomu je v tomto případě menší než jedna $(n < 1)$ a úhel lomu je proto větší než úhel dopadu. Této změně směru šíření vlnění při průchodu rozhraním z prostředí opticky **hustšího** do prostředí opticky **řidšího** říkáme proto **lom od kolmice**.



Obr.2.7

Zvětšuje-li se úhel dopadu α, láme se vlnění od kolmice pod stale větším a větším úhlem lomu $\beta > \alpha$. Při určitém úhlu dopadu α_m (paprsek P_2 na **obr.2.7a**), nazývaném **mezní úhel**, má lomený paprsek P_2' směr rovnoběžný s rozhraním. Úhel **lomu** je tedy 90^o a dopadající vlnění v tomto případě **nepronikne** do druhého prostředí. Je-li n index lomu daných dvou prostředí $(n < 1)$, platí podle zákona lomu pro **mezní** úhel α_m dopadu na jejich rozhraní

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_m}{\sin 90^o} \Rightarrow \sin\alpha_m = n.$$

Je-li úhel dopadu **větší** než mezní úhel α_m (paprsek P na **obr.2.7b**), dochází na rozhraní k **úplnému odrazu** vlnění (P'). Při úplném odrazu představuje rozhraní pro vlnění nepropustnou překážku a veškerá energie přenášená vlněním se odráží a vrací zpět do prvního prostředí.

Při odrazu a lomu **nemění** postupné vlnění svoji **frekvenci**. Se změnou fázové rychlosti při průchodu rozhraním proto dochází ke změně jeho vlnové délky. Platí tedy

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{v_2}{v_1}\lambda_1.$$

ÚLOHY

1. Rovinná vlna se šíří vzduchem rychlostí o velikosti $340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a vodou rychlostí o velikosti $1450\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jakou podmínku musí splňovat úhel dopadu na rozhraní, aby vlnění proniklo ze vzduchu do vody? $\left[\alpha < 13{,}5^{o}\right]$

2. Rovinná vlna, šířící se ve vodě rychlostí o velikosti $1450\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, dopadá na ocelovou desku pod úhlem 30^{o}. V oceli je rychlost postupu této vlny rovna $5000\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Projde vlnění rozhraním vody a oceli? [Neprojde, neboť $\alpha_m = 17^{o}$]

OHYB A INTERFERENCE VLNĚNÍ

Vlnění je speciálním případem pohybu a při jeho šíření dochází k jevům, které se při jiných druzích pohybu neprojevují. Takovými, pro vlnění zcela specifickými jevy, jsou jeho **ohyb** a **interference**.

Ohybem vlnění rozumíme **odchylku** od jeho přímočarého šíření ve směru paprsku, kolmého na vlnoplochu. Ze zkušenosti víme, že např. hluk zvenčí pronikne otevřenými dveřmi nebo okny do celé místnosti, že můžeme bez problémů hovořit s osobou, která je za rohem budovy nebo jinou překážkou. Tyto a další příklady ukazují, že postupné vlnění (např. zvuk) se po průchodu otvorem nebo v prostoru za překážkou ohýbá.

Ohyb vlnění lze vysvětlit pomocí **HUYGENSOVA** principu šířením vlnění z jeho elementárních zdrojů do prostoru za překážkou nebo za okrajem otvoru. Teorie i četné experimenty potvrzují, že k zvláště výraznému ohybu vlnění dochází tehdy, má-li překážka nebo otvor rozměry srovnatelné s jeho vlnovou délkou v daném prostředí.

V látkových prostředích, kterými jsme obklopeni, se obvykle šíří větší počet vlnění z různých zdrojů současně. Jednoduchým a v praxi důležitým příkladem je současné šíření vlnění, postupujícího k rozhraní dvou prostředí a vlnění od tohoto rozhraní částečně nebo úplně odraženého.

Vlnění, současně postupující daným prostředím, mohou mít obecně různou frekvenci a v látkách pevných i různý charakter - některá z nich mohou být příčná, jiná podélná. Dorazí-li tato vlnění v jistém okamžiku k jisté částici daného prostředí, "nutí" ji každé z nich ke kmitání podle vlastních parametrů - částice by tedy měla současně konat několik kmitavých pohybů, lišících se frekvencí, směrem kmitání, amplitudou výchylky, fází apod.

Částice může současně "splnit" všechny tyto různorodé požadavky pouze tak, že její výsledný pohybový stav je dán složením (superpozicí) všech kmitavých pohybů, k nimž je jednotlivými vlněními současně "nucena". Jevu, tvořenému superpozicí kmitavých pohybů částic prostředí v místech, v nichž se různá postupná vlnění spolu setkávají a překrývají, říkáme **skládání** neboli **interference vlnění**.

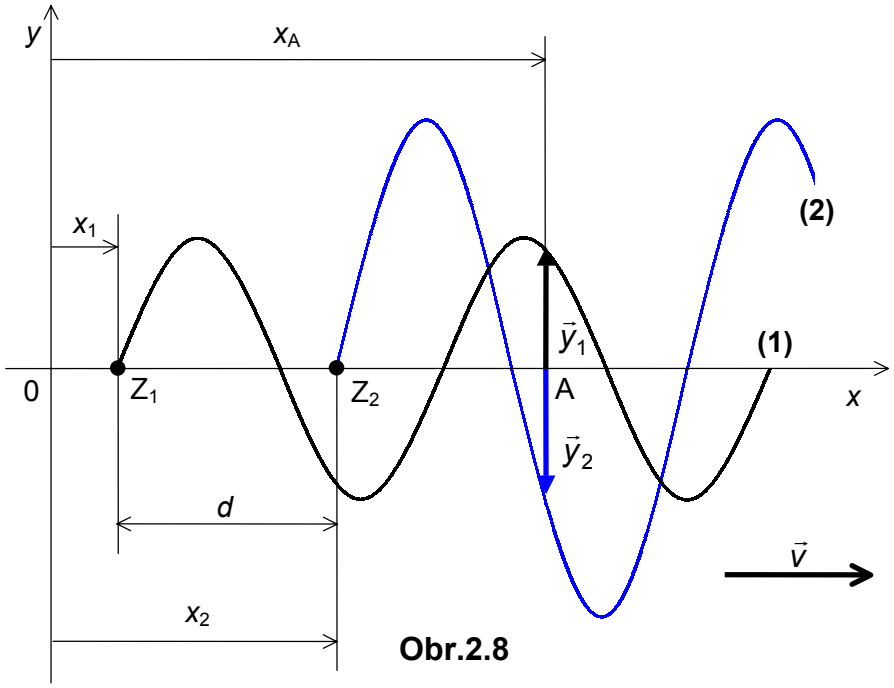
Výsledek interference vlnění je obecně velmi složitý. Proto se při studiu tohoto jevu vrátíme k nejjednoduššímu modelu látkového prostředí, kterým je přímá řada hmotných bodů.

Představme si, že touto bodovou řadou (**obr.2.8**) současně postupují např. dvě příčná vlnění, šířící se fázovou rychlostí v ze zdrojů Z_1, Z_2, kmitajících v téže rovině

se stejnou frekvencí a fází. Tato (**stejným směrem** postupující) vlnění můžeme popsat rovnicemi

$$y_1(x,t) = y_{1,\mathrm{m}} \sin\omega\left(t - \frac{x - x_1}{v}\right);\ y_2(x,t) = y_{2,\mathrm{m}} \sin\omega\left(t - \frac{x - x_2}{v}\right),$$

v nichž x_1, x_2 jsou souřadnice zdrojů vlnění.



Obr.2.8

Zvolíme-li zcela náhodně některý bod řady - např.bod A o souřadnici x_A, můžeme harmonické pohyby, k nimž je tento bod oběma vlněními **současně** "nucen", popsat rovnicemi

$$y_1(x_A,t) = y_{1,\mathrm{m}} \sin\omega\left(t - \frac{x_A - x_1}{v}\right);\ y_2(x_A,t) = y_{2,\mathrm{m}} \sin\omega\left(t - \frac{x_A - x_2}{v}\right).$$

Superpozice stejnosměrných izochronních harmonických kmitů byla popsána v části věnované kmitání. V libovolném bodě řady ji lze (v daném okamžiku) velmi jednoduše provést graficky vektorovým součtem dílčích okamžitých výchylek y_1, y_2.

Fázový rozdíl obou skládaných kmitání (i vlnění) v bodě A je

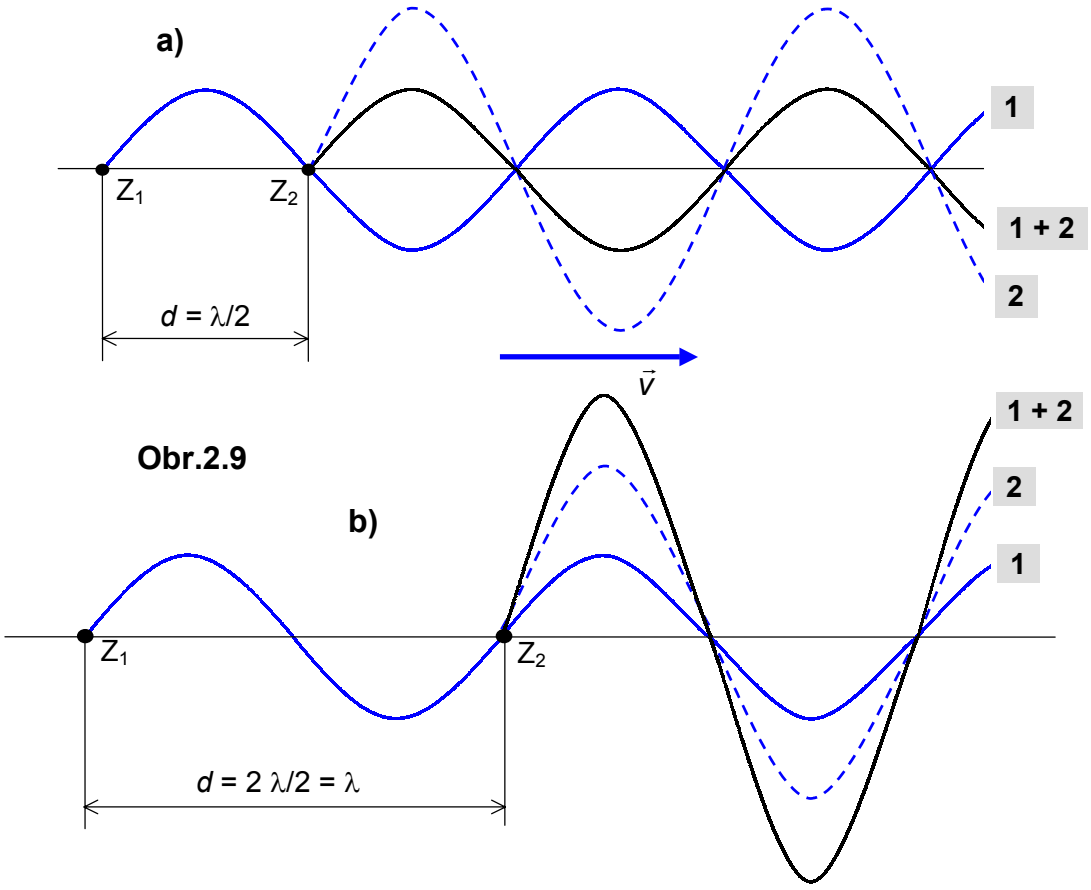
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega\left(t - \frac{x_A - x_2}{v}\right) - \omega\left(t - \frac{x_A - x_1}{v}\right) = \omega\frac{x_2 - x_1}{v} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\omega}{v}d = \frac{2\pi}{vT}d \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d}.$$

Fázový rozdíl obou interferujících vlnění tedy nezávisí na poloze bodu A a je při dané (a shodné) frekvenci obou vlnění a stálé vzdálenosti d jejich zdrojů Z_1, Z_2 **stálý**. Vlněním, jejichž fázový rozdíl je konstantní, říkáme **vlnění koherentní**.

Vzdálenost d zdrojů Z_1, Z_2 představuje **dráhový rozdíl** obou skládaných vlnění, dorazivších do téhož bodu řady.

Na **obr.2.9** jsou znázorněny **extrémní** výsledky interference dvou **koherentních** vlnění v závislosti na jejich dráhovém rozdílu.



Je-li **dráhový** rozdíl d roven **lichému** násobku poloviny vlnové délky (**obr.2.9a**), je **fázový** rozdíl vlnění roven **lichému** násobku π (radiánů)

$$d = (2n-1)\frac{\lambda}{2} \wedge \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \Rightarrow \quad \Delta\varphi = (2n-1)\pi .$$

Skládaná koherentní vlnění tedy mají při tomto dráhovém (a fázovém) rozdílu v každém bodě řady (a v každém okamžiku) **opačnou** fázi a **amplituda** y_m **výsledného** vlnění je proto **minimální**

$$y_m = \left| y_{1,m} - y_{2,m} \right| = y_{min.} .$$

Druhý extrémní výsledek interference dostaneme při dráhovém rozdílu rovnajícím se **sudému** násobku poloviny vlnové délky (**obr.2.9b**)

$$d = 2n\frac{\lambda}{2} \wedge \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 2n\pi .$$

Při tomto fázovém rozdílu mají obě vlnění ve všech bodech řady trvale **stejnou** fázi a interferencí dojde k jejich **maximálnímu zesílení** - **amplituda** výchylky výsledného vlnění je v tomto případě **největší** a rovna

$$y_m = y_{1,m} + y_{2,m} = y_{max.} \cdot$$

K podobným závěrům bychom dospěli i v případě interference dvou koherentních **podélných** vlnění postupujících bodovou řadou z různých zdrojů ve stejném směru.

Výsledkem interference (dvou) **koherentních harmonických** vlnění, postupujících stejným směrem v řadě bodů je tedy opět postupné **harmonické** vlnění **téže frekvence**, pro jehož amplitudu y_m v závislosti na jejich (stálém) **dráhovém** rozdílu skládaných vlnění platí

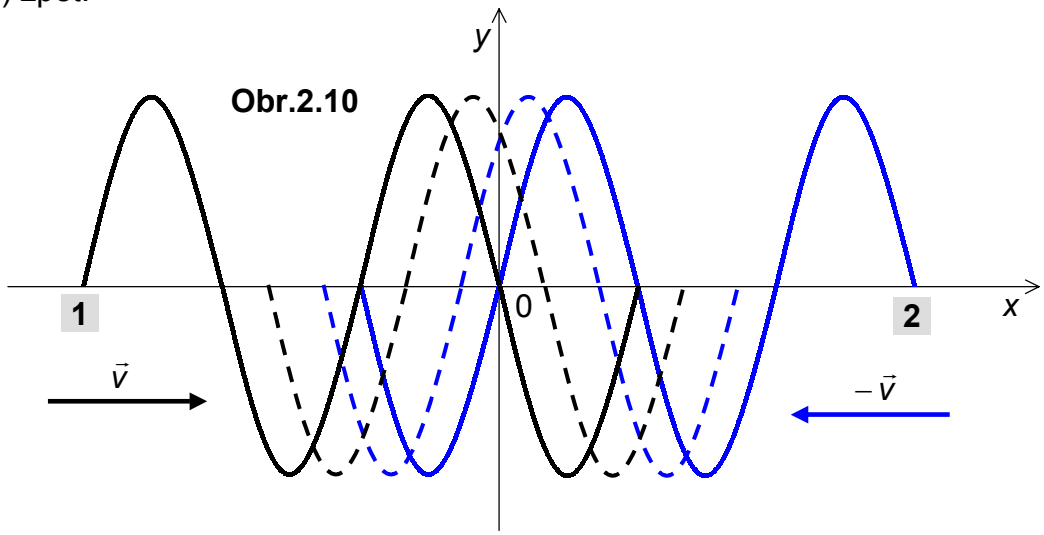
$$|y_{1,m} - y_{2,m}| \le y_m \le y_{1,m} + y_{2,m} \cdot$$

ÚLOHA

Dva zdroje vlnění, kmitající stejnosměrně s toutéž fází a frekvencí $170\,\mathrm{Hz}$, jsou od sebe vzdáleny $0{,}5\,\mathrm{m}$. Fázová rychlost vlnění, šířících se z těchto zdrojů, má velikost $340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete jejich fázový rozdíl. Pro jakou vzdálenost obou zdrojů by vlnění vzniklé interferencí mělo maximální (minimální) amplitudu výchylky? $[\pi/2; 2\,\mathrm{m}; 1\,\mathrm{m}]$

STOJATÉ VLNĚNÍ. CHVĚNÍ TĚLES

Zajímavý a pro praxi důležitý je výsledek interference dvou stejných příčných nebo podélných vlnění postupujících **opačnými směry** (**obr.2.10**). Tato situace nastává např.tehdy, když se vlnění (y_1) postupující řadou bodů skládá s vlněním (y_2), odraženým na jejím konci (rozhraní dvou prostředí) a vracejícím se (toutéž bodovou řadou) zpět.



Obr.2.10

Předpokládejme, že obě skládaná vlnění téže frekvence, šířící se současně řadou bodů fázovými rychlostmi $\vec{v}$ a $-\vec{v}$, mají stejnou amplitudu výchylky $y_{1m} = y_{2m} = y_m$. Zvolme za počátek soustavy souřadnic některý z bodů řady, v němž se na začátku měření času $(t = 0)$ tato vlnění setkávají s nulovou fází. Při této volbě počátečních podmínek můžeme obě vlnění v okamžiku t a bodě o souřadnici x popsat rovnicemi

$$y_1(x,t) = y_m \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \;;\; y_2(x,t) = y_m \sin\omega\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Rozdílnost znamének ve vyjádření fází obou vlnění je dána opačnými směry jejich šíření - opačnými vektory jejich fázových rychlostí.

Výsledek interference obou vlnění v každém bodě řady je tedy superpozicí dvou izochronních harmonických kmitů a pro výslednou okamžitou výchylku v bodě o souřadnici x platí

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \Rightarrow$$

$$y(x,t) = y_m\left[\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \sin\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)\right].$$

Úpravu tohoto vztahu můžeme provést pomocí vlastností goniometrických funkcí. Vyjdeme přitom ze součtových vzorců

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Jejich součtem je výraz

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$$

Položíme-li $\alpha+\beta=\phi$ a $\alpha-\beta=\delta$, dostaneme po dosazení do předchozího vztahu

$$\sin\phi + \sin\delta = 2\sin\frac{1}{2}(\phi+\delta)\cos\frac{1}{2}(\phi-\delta).$$

Pro naši potřebu položíme nyní

$$\phi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right);\ \delta = \omega\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

takže pro výslednou okamžitou výchylku dostáváme [kosinus je **sudá** funkce $\Rightarrow$ $\cos(-\omega x/v) = \cos(\omega x/v)$]

$$y(x,t) = 2y_m\cos\left(\frac{\omega}{v}x\right)\sin\omega t = 2y_m\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Výsledné kmitání bodů řady vzniklé interferencí obou proti sobě postupujících vlnění je tedy **harmonické** a jeho frekvence je shodná s frekvencí skládaných vlnění.

Hledejme nyní další vlastnosti výsledného vlnění rozborem jeho rovnice a znázorněním tvaru řady kmitajících bodů ve význačných okamžicích (**obr.2.11**).

$t = 0$ $\quad(\sin 0 = 0) \Rightarrow y(x,0) = 0.$

Všechny body jsou v tomto okamžiku v rovnovážné poloze a řada má tvar **přímky** (**obr.2.11a**).

$t = T/4$ $\quad(\sin\pi/2 = 1) \Rightarrow y(x,T/4) = 2y_m\cos 2\pi x/\lambda$

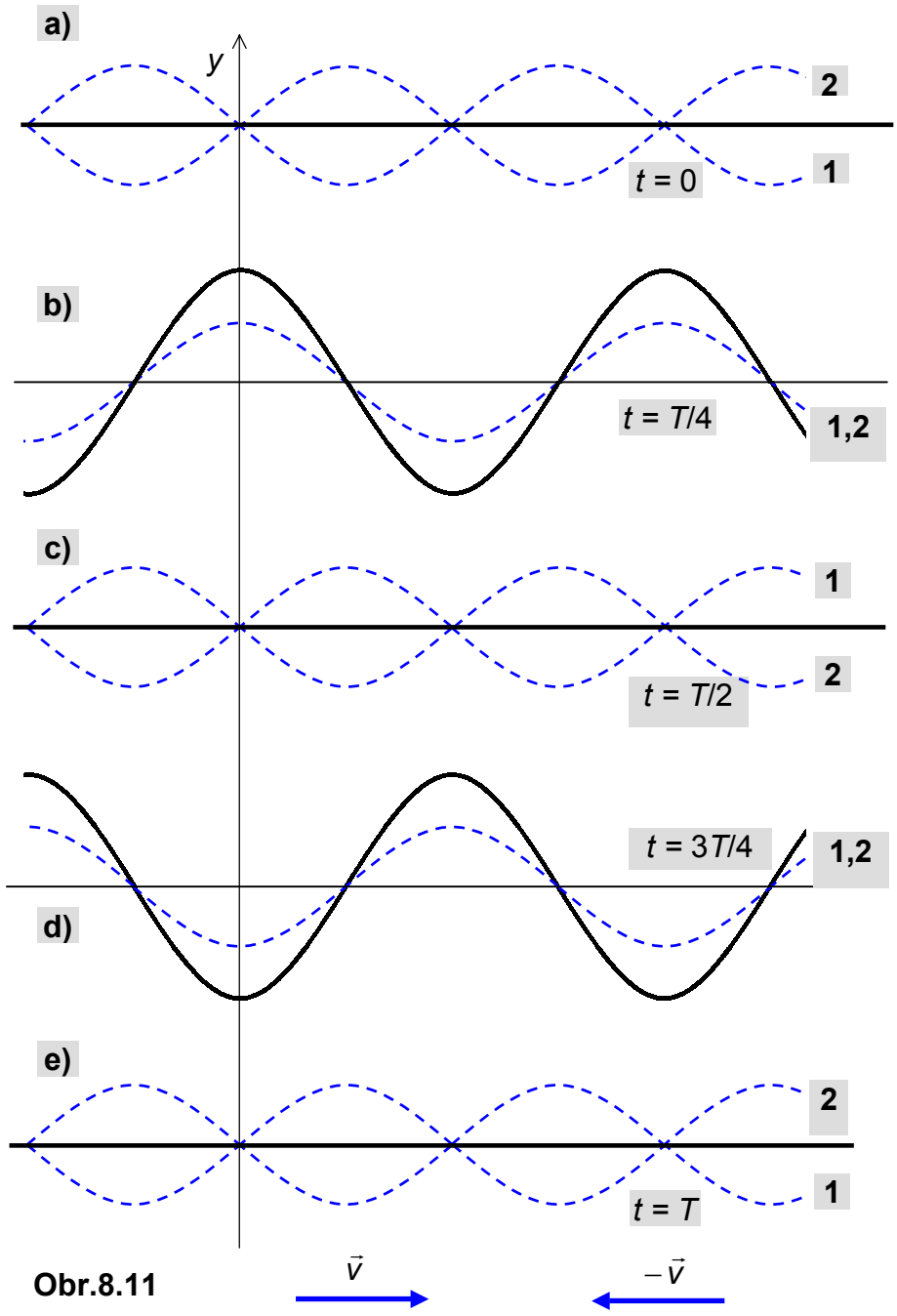
Za čtvrtinu periody dosáhnou kmitající body svých maximálních výchylek, jejichž velikost i směr však závisí na poloze jednotlivých bodů – na jejich souřadnici x (**obr.2.11b**). Body, jejichž souřadnice splňují podmínku $x = 2k\lambda/2$ (k je celé číslo),

pro něž je $\cos 2k\pi = 1$, jsou tedy v okamžiku $t = T/4$ v **horní** maximální výchylce $(y = 2y_m)$. Souřadnice, pro něž platí $x = (2k-1)\lambda/2 \Rightarrow \cos(2k-1)\pi = -1$, patří bodům, jež jsou v daném okamžiku v dolní maximální výchylce $(y = -2y_m)$.

Body, jejichž souřadnice jsou **lichými** násobky **čtvrtiny** vlnové délky: $x = (2k-1)\lambda/4$ $\Rightarrow \cos(2k-1)\pi/2 = 0$, mají v tomto, ale i ve všech dalších okamžicích nulovou výchylku. Řada kmitajících bodů má v okamžiku $t = T/4$ tvar **sinusoidy**.

$t = T/2 \quad (\sin\pi = 0) \Rightarrow y(x, T/2) = 0$.

Po polovině kmitu jsou všechny body ve svých rovnovážných polohách a řada má znovu tvar **přímky** (**obr.2.11c**).



Obr.8.11

$t = 3T/4 \quad (\sin 3\pi/2 = -1) \Rightarrow y(x, 3T/4) = -2y_m \cos 2\pi x/\lambda$.

Kmitající body jsou ve svých **maximálních** výchylkách, opačných vzhledem ke stavu v okamžiku $t = T/4$ a řada má tvar sinusoidy, otočené vzhledem k $t = T/4$ o 180° kolem osy x (**obr.2.11d**).

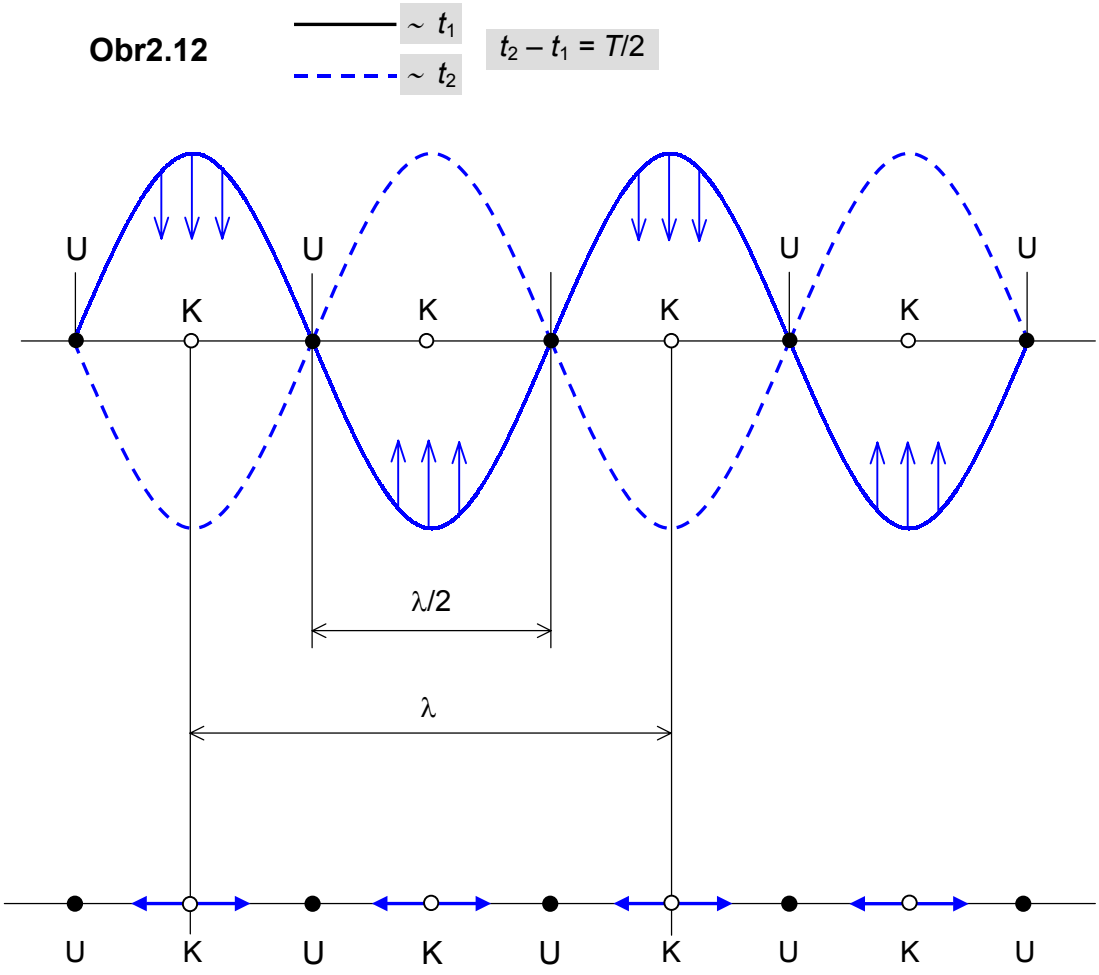
$t = T \quad (\sin 2\pi = 0) \Rightarrow y(x, T) = 0$.

Po ukončení jednoho kmitu jsou body ve svých počátečních rovnovážných polohách a řada má opět tvar přímky (**obr.2.11e**).

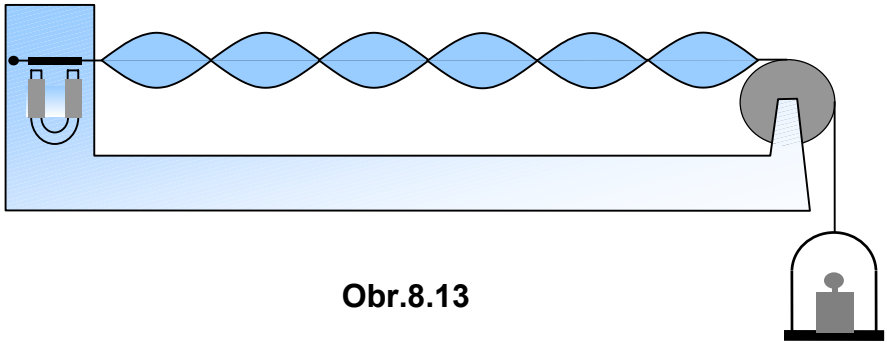
SHRNUTÍ

Výsledkem interference dvou stejných harmonických vlnění, postupujících proti sobě bodovou řadou, je **izochronní harmonické kmitání** bodů této řady, jehož amplituda výchylky se mění v intervalu $\langle 0; 2y_m \rangle$ v závislosti na poloze bodů v řadě (**obr.2.12**). Některé body, vzdálené od sebe o polovinu vlnové délky skládaných vlnění $(\lambda/2)$, jsou trvale a klidu a říkáme jim **uzly** (U). Ve vzdálenosti $(\lambda/4)$ od uzlů jsou tzv. **kmitny** (K), v nichž má kmitání největší amplitudu výchylky $(2y_m)$. Mezi každými dvěma sousedními uzly kmitají body se stejnou fází, opačnou k fázi kmitání bodů mezi sousedními dvojicemi (sousedních) uzlů. Kmitny a uzly mají v řadě stálou polohu - výsledné vlnění tedy bodovou řadou nepostupuje a proto mu říkáme **vlnění stojaté** nebo také **chvění**.

Obr2.12



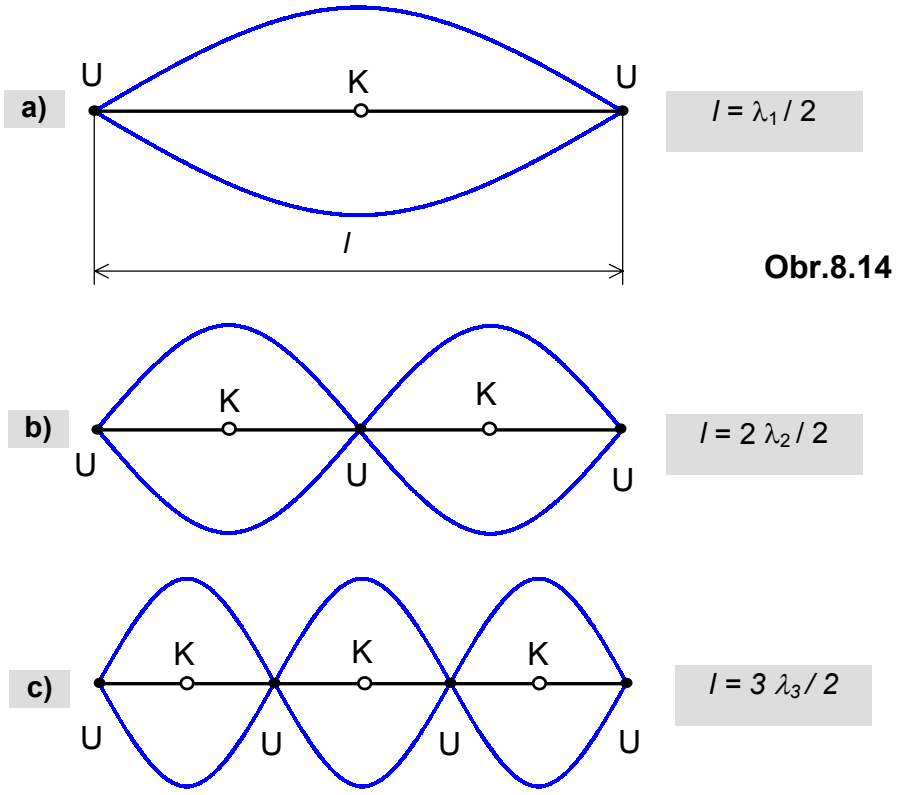
Vznik stojatého vlnění lze jednoduše ukázat pomocí gumové hadice o délce několika metrů, jejíž jeden konec upevníme, nebo jej uvážeme provázkem o délce několika decimetrů k nějakému pevnému tělesu. Držíme-li volný konec hadice v ruce tak, aby byla mírně napjatá, můžeme periodickým pohybem ruky docílit toho, aby k druhému konci postupovalo příčné vlnění. Toto vlnění se na konci hadice odráží a skládá s vlněním postupujícím v původním směru. Podstatně lepšího výsledku lze dosáhnout tím, že hadici nahradíme strunou, jejíž volný konec rozkmitáme nějakým technickým zařízením (elektromagneticky, motorkem, větší ladičkou apod) - **obr.2.13**.



Obr.8.13

V praxi má značný význam stojaté vlnění (chvění), vznikající v tělesech vhodného tvaru (struny, tyče, vzduchové sloupce, desky, zvony, pružné blány apod.) skládáním vlnění, odražených na jejich stěnách (koncích) - rozhraních, oddělujících je od jejich okolí.

Všimněme si např. chvění struny hudebního nástroje. Vzhledem k tomu, že oba její konce jsou upevněny (a nemohou proto příčně nebo podélně kmitat), může ve struně vzniknout pouze takové stojaté vlnění, které má na jejích koncích uzly (**obr.8.14**).



Obr.8.14

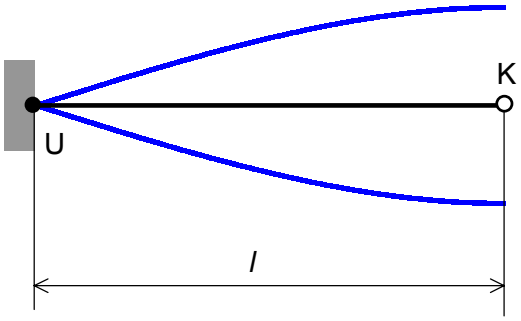
Při dané délce l struny a fázové rychlosti v strunou postupujících skládaných vlnění lze frekvence těchto stojatých vlnění určit z podmínky (n je kladné přirozené číslo).

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2l}.$$

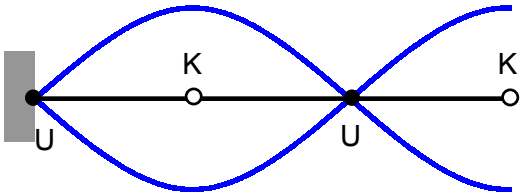
Nejmenší z těchto z těchto **vlastních** frekvencí chvění struny označujeme jako **základní**: $f_z = v/2l$, její **přirozené** násobky $f_n = nf_z \quad (n \geq 2)$ tvoří množinu tzv. **vyšších harmonických** frekvencí.

Ladíme-li např. kytaru nebo housle, měníme při stálé délce strun jejich základní frekvence změnou napětí, na němž závisí fázová rychlost skládaných vlnění. Při hře pak dosahujeme změn základní frekvence změnou délky (stiskem prstu) dané struny při jejím stálém napětí.

Podobně jako u struny můžeme určit (vlastní) základní a vyšší harmonické frekvence chvění tyče, upevněné pouze na jednom konci nebo v jediném "bodě" (**obr.2.15**). Podmínkou pro "dovolená" stojatá vlnění je to, že v místě upevnění tyče dané délky musí být **uzel** a na volném konci (nebo koncích) **kmitna**.



$l = \lambda_1/4 \Rightarrow f_1 = f_z = v/4l$



$l = 3\lambda_2/4 \Rightarrow f_2 = 3\, v/4l$

Obr.2.15

$f_n = (2n-1)\, f_z$

Chvění desek nebo pružných blan je jevem podstatně složitějším. Základní i vyšší harmonické frekvence stojatého vlnění v těchto tělesech je stejně jako v případě strun a tyčí závislá na jejich geometrickém tvaru, způsobu upevnění a fázové rychlosti vlnění, jejichž interferencí vzniká.

ÚLOHY

1. Určete vzdálenost dvou sousedních uzlů stojatého vlnění, které vzniklo interferencí dvou stejných, proti sobě postupujících vlnění o periodě $2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}$. Fázová rychlost vlnění má velikost $1425\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. $[1{,}5\ \mathrm{m}]$

2. Interferencí postupujícího a odraženého vlnění vzniklo ve skleněné trubici naplněné vzduchem stojaté vlnění. Vzdálenost sousedních uzlů je $7{,}0\,\mathrm{cm}$, rychlost vlnění má velikost $343\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jaká je frekvence stojatého vlnění (chvění vzduchového sloupce v trubici)? $[2{,}5\,\mathrm{kHz}]$

3. Stojaté vlnění vzniklo interferencí dvou vlnění o frekvenci $475\,\mathrm{Hz}$. Vzdálenost sousedních uzlů je $1{,}5\,\mathrm{m}$. Jaká je velikost fázové rychlosti vlnění v daném prostředí? $\left[1430\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right]$

ZVUK A JEHO VLASTNOSTI

Vlnění látkového prostředí schopné vyvolat sluchový vjem nazýváme **zvuk**. Část fyziky, která studuje vznik, šíření a základní vlastnosti zvuku, se jmenuje **fyzikální akustika**.

Zdrojem akustického vlnění schopného vyvolat sluchový vjem neboli zdrojem zvuku je každé periodicky i neperiodicky se pohybující (kmitající nebo chvějící se) těleso, které předává mechanickou energii látkovému prostředí, s nímž se stýká.

Přenos této energie daným prostředím (šíření zvuku od jeho zdroje) se uskutečňuje postupem mechanického vlnění. Ve vakuu je tedy šíření zvukových vln nemožné (budík zvonící v evakuovaném prostoru pod recipientem vývěvy neslyšíme).

Chvějící se struna rozkmitává molekuly plynů vzduchu ve svém bezprostředním okolí a toto kmitání se šíří k dalším molekulám **postupným podélným vlněním**. Dospěje-li toto vlnění k našemu uchu, vyvolá **izochronní kmitání ušního bubínku**, přenášené dalšími částmi ucha a nervovými cestami do mozkového sluchového centra, které je tímto sluchovým vjemem informováno o chvění struny v našem okolí.

Zdravé lidské ucho registruje (slyší) k němu doraziví postupná vlnění o frekvencích od (přibližně) $16\,\mathrm{Hz}$ do $16\,\mathrm{kHz}$ - tyto hranice jsou značně individuální. Postupné vlnění o frekvenci nižší než $16\,\mathrm{Hz}$ nazýváme **infrazvuk**, frekvenci vyšší než $16\,\mathrm{kHz}$ má **ultrazvuk**.

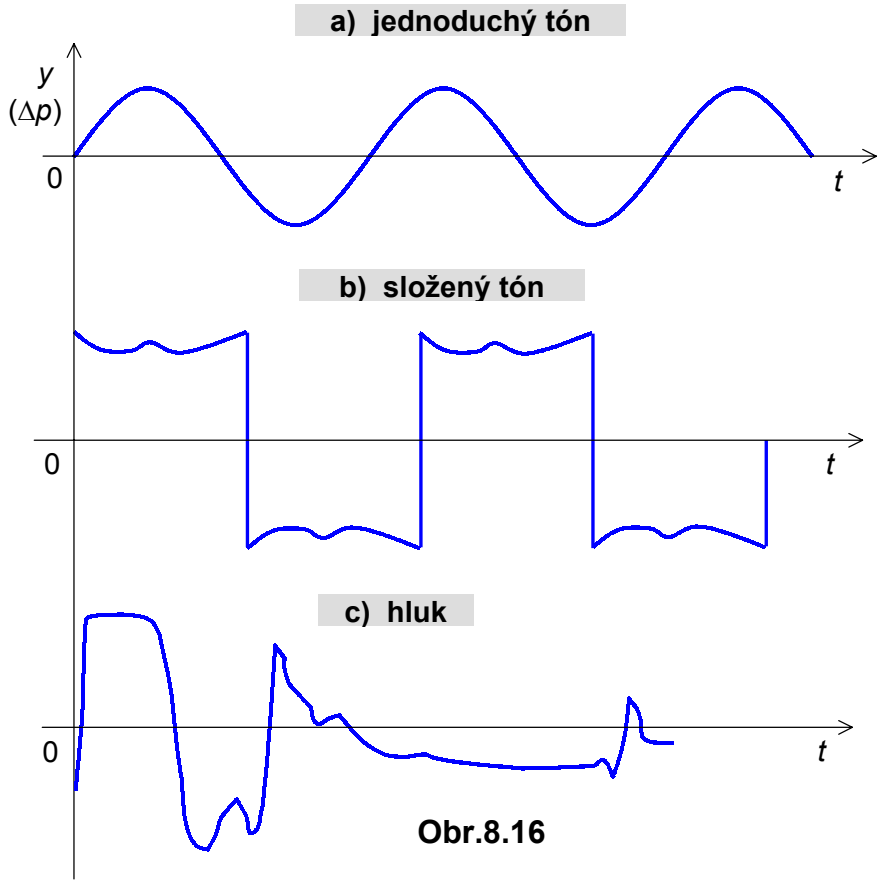
Pomineme-li embryonální stádium života, je přirozeným látkovým prostředím, kterým se k lidskému uchu šíří zvukové vlny, **vzduch**. **Podélné** vlnění vyvolává ve vzduchu fázovou rychlostí postupující **zhuštění** a **zředění**. Tyto změny hustoty jsou tím větší, čím větší je amplituda podélného kmitání molekul vzduchu a tím i energie přenášená vlněním. Vnějším (měřitelným) projevem tohoto nerovnovážného stavu je tzv. **akustický tlak** - rozdíl tlaků vzduchu mezi místy jeho větší a menší hustoty.

Lidské ucho vnímá (slyší) tyto (periodické) tlakové změny vzduchu ve svém okolí, jsou-li větší než hodnota tzv. **prahu slyšení** - přibl. $10^{-5}\,\mathrm{Pa}$. Je-li energie přenášená zvukovými vlnami příliš velká, může značná tlaková změna (vlna) ucho poškodit (např.porušení bubínku při blízké detonaci). Za tzv. **práh bolesti**, při jehož překročení je toto nebezpečí aktuální, je považována hodnota akustického tlaku přibl. $10^{2}\,\mathrm{Pa}$. Tyto **prahové hodnoty** odpovídají intervalu frekvencí od $700\,\mathrm{Hz}$ do $6\,\mathrm{kHz}$, na něž je lidské ucho nejcitlivější.

Libý či nelibý subjektivní dojem z vnímaného zvuku má objektivní fyzikální příčinu. Libozvučně znějící hudební zvuky neboli **tóny** se šíří od **periodicky** kmitajících (chvějících se) zdrojů. Rušivé nehudební zvuky - **hluky** (bouchání, rachot, skřípání apod.) - vznikají naopak **neperiodickým** pohybem těles.

Zdroji hudebních zvuků jsou (správně naladěné a používané) hudební nástroje a také hlasové orgány některých živočichů a člověka. Tyto zvuky (tóny) mají zpravidla složitý (ale periodický) průběh časové závislosti okamžité výchylky kmitání zdroje i částic prostředí, kterým se v podobě vlnění šíří (**obr.2.16**).

Je tomu tak proto, že tyto (složené) tóny jsou zpravidla výsledkem interference několika stojatých vlnění, z nichž jedno má nejnižší, tzv. základní frekvenci, určující výšku daného tónu. Další skládaná stojatá vlnění mají tzv. vyšší harmonické frekvence, které jsou přirozenými násobky frekvence základní.



Obr.8.16

Tón o základní frekvenci bývá zpravidla dominantní, míra zastoupení a výběr vyšších harmonických tónů ve výsledném hudebním zvuku je však pro každý zdroj specifická a charakteristická. Díky tomuto různému složení (**barvě**) výsledného zvuku můžeme - po předchozí zkušenosti - od sebe poslechem odlišit různé hudební nástroje i hlasy různých osob a živočichů.

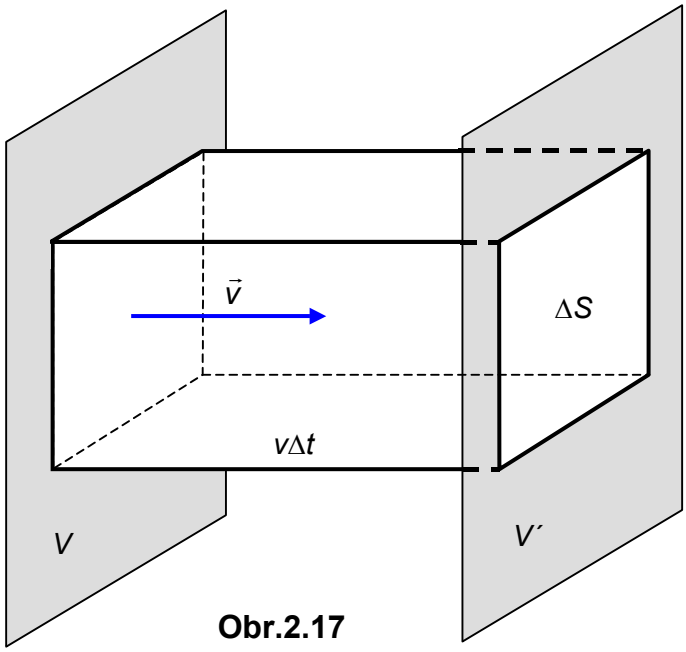
Následnou, tzv. **harmonickou analýzou** záznamu složeného zvuku - jeho rozkladem na v něm obsažené jednoduché tóny vyšších harmonických frekvencí - lze naopak přesně určit (akustickou) charakteristiku jeho zdroje. Tímto způsobem lze např. soudně rozhodnout o autorství poplašných telefonátů nebo analyzovat jinak těžko identifikovatelné a srozumitelné zvukové nahrávky - např. z černých skříněk havarovaných letadel apod.
Nejdůležitější charakteristikou zvuku je jeho (základní) **frekvence**, nezávislá na druhu prostředí, kterým se zvuk (vlnění) šíří. Čím větší je frekvence zvuku, tím vyšší je jeho - námi vnímaná - **výška**. V hudební akustice byla za základní zvolena výška jednoduchého tónu o frekvenci 440 Hz, nazývaného **komorní „a“** a označovaného a^1. V technické praxi používáme jako srovnávací (referenční) jednoduchý tón o frekvenci 1 kHz.

INTENZITA VLNĚNÍ A HLASITOST ZVUKU

Různě velké tlakové změny vzduchu v okolí našeho ucha vyvolané vlněním a rostoucí s přenášenou energií, pociťujeme jako různou hlasitost vnímaných zvuků. Objektivní mírou hlasitosti zvuku (a energie přenášené vlněním) je hodnota veličiny, nazývané **intenzita** *I* zvuku (vlnění).

Intenzita vlnění je velmi důležitá veličina a proto její definici uvedeme stručným výkladem.

Představme si, že od vzdáleného, trvale a netlumeně kmitajícího zdroje se izotropním prostředím šíří fázovou rychlostí v postupné vlnění, jehož čelní rovinná vlnoplocha má v okamžiku t polohu V (**obr.2.17**). Na konci následného časovém intervalu t tato vlnoplocha postoupí o vzdálenost $v\Delta t$ do polohy V' a vlnění "zasáhne" a do trvalého kmitavého pohybu uvede všechny částice prostředí v prostoru omezeném rovinami V a V'.



Obr.2.17

"Vybereme-li" z tohoto prostoru kvádr, jehož podstavy o plošném obsahu ΔS leží v rovinách V a V', můžeme (alespoň teoreticky) sečíst energii kmitání všech (následkem vlnění kmitajících) částic, ležících uvnitř kvádru a na jeho stěnách. Tento součet představuje mechanickou energii E_V, která - přenášená vlněním - prošla za časový interval Δt plochou o obsahu ΔS, ležící v rovině V a "zaplnila" postupně kvádr o objemu $\Delta S v \Delta t$.

Přisoudíme-li všem částicím (oscilátorům) daného prostředí v prostoru vymezeném kvádrem stejné mechanické vlastnosti a stejnou (a po dobu Δt stálou) amplitudu výchylky, je **hustota energie vlnění** v této části prostředí rovna

$$\frac{E_V}{\Delta S\, v\, \Delta t}.$$

Podíl $E_V/\Delta t$ je hodnota energie přenesená vlněním plochou o obsahu ΔS za jednotku času. Představuje tedy **výkon** P vlnění, připadající na část rovinné vlnoplochy V o obsahu ΔS.

Pro porovnání různých vlnění z hlediska jejich výkonu P při přenosu (mechanické) energie plochou o obsahu ΔS zavádíme veličinu

$$I = \frac{P}{\Delta S};\ [I] = \mathrm{W \cdot m^{-2}},$$

kterou nazýváme **intenzita vlnění**.

Lidské ucho slyší srovnávací tón o frekvenci $1\,\mathrm{kHz}$ (s různou hlasitostí) v intervalu intenzit přibl. $10^{-12}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$ až $1\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Velká šířka tohoto intervalu, jehož meze odpovídají prahu slyšení a prahu bolesti zvuku této frekvence, je při praktickém použití nepohodlná. Proto ji matematicky "zmenšujeme" pomocí veličiny nazývané **hladina intenzity zvuku** B. Tuto veličinu definujeme jako dekadický logaritmus poměru intenzity I měřeného zvuku a **srovnávací intenzity** $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$, odpovídající prahu slyšení lidského ucha pro základní tón o frekvenci $1\,\mathrm{kHz}$. Je tedy

$$B(I) = \log \frac{I}{I_0}.$$

Jednotkou hladiny intenzity zvuku je $\mathrm{bel}\,(\mathrm{B})$ na počest vynálezce telefonu **A.G.BELLA**. V praxi používáme jednotky desetkrát menší (dB). Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že celý interval hladin intenzity lidským uchem slyšitelných zvuků má šířku přibližně $120\,\mathrm{dB}$.

Prahu **slyšení** tónu o frekvenci $1\,\mathrm{kHz}$ odpovídá **nulová** hladina intenzity, neboť

$$\log \frac{I_0}{I_0} = \log 1 = \log 10^0 = 0 \Rightarrow\ B(I_0) = 0.$$

Prahu **bolesti** při vnímání tohoto tónu, jemuž odpovídá intenzita $1\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$, přísluší hladina intenzity

$$B(I): \log \frac{10^0}{10^{-12}} = \log 10^{12} = 12 \Rightarrow\ B(I) = 12\,\mathrm{B} = 120\,\mathrm{dB}.$$

Zvýšení hladiny intenzity zvuku o $1\,\mathrm{dB}$ - což je pro normální ucho **minimální** rozlišitelný rozdíl - představuje zvýšení jeho intenzity I o přibl. $1/4$, což můžeme opět ověřit výpočtem

$$B(I_2) - B(I_1) = 1\,\mathrm{dB} \Leftrightarrow \left(\log \frac{I_2}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0} \right) = 10^{-1} \Rightarrow$$

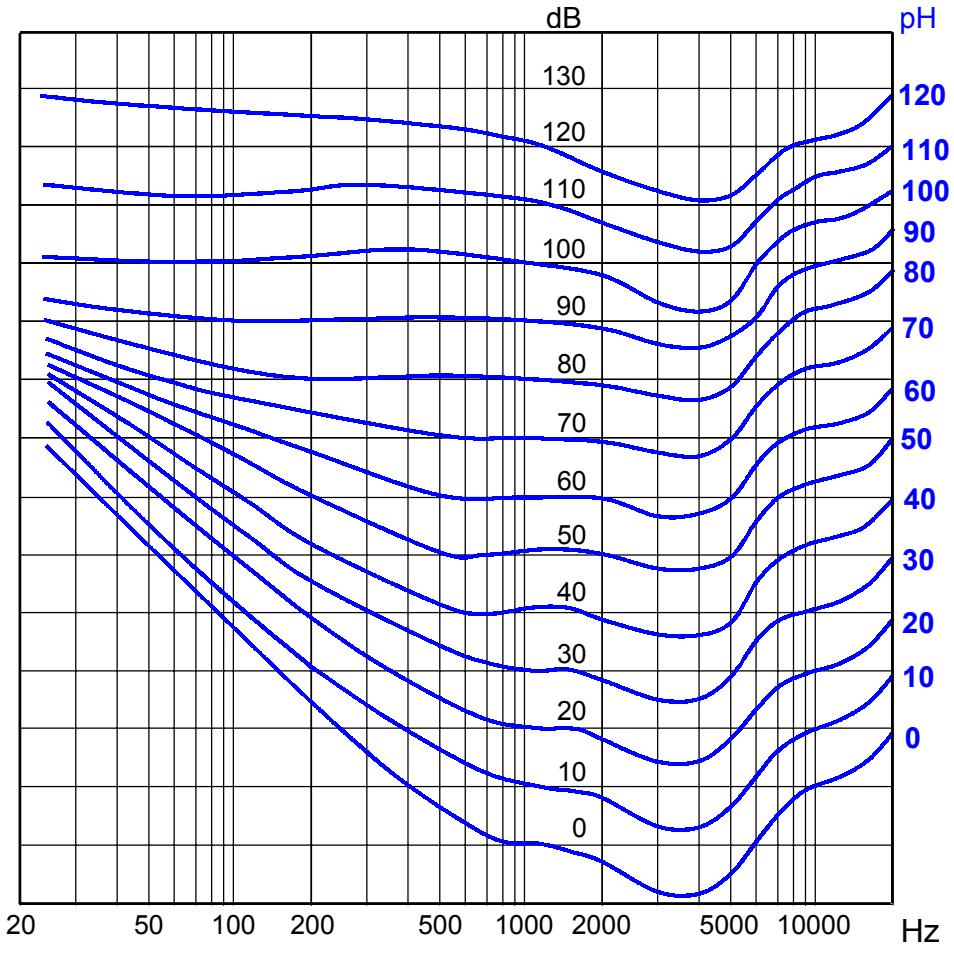
$$10 \log \frac{I_2}{I_1} = 1 = \log 10 \Rightarrow \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^{10} = 10 \Rightarrow\ I_2 = 10^{0,1} I_1 \Rightarrow\ I_2 = 1{,}25983\, I_1.$$

Lidské ucho je různě citlivé ke zvukům (tónům) různých frekvencí. Proto vnímá zvuky stejných intenzit (a hladin intenzity) ale různých frekvencí jako různě hlasité. Z těchto (fyziologických) důvodů zavádíme další akustickou veličinu, tzv. **hladinu hlasitosti** Λ, kterou pro zvuk libovolné frekvence určujeme takto:

Měníme intenzitu srovnávacího tónu $(1\,\mathrm{kHz})$ a srovnáváme jeho hlasitost s hlasitostí daného zvuku. Dosáhneme-li subjektivního pocitu stejné hlasitosti, je hladinou

hlasitosti měřeného zvuku hladina intenzity zvuku srovnávacího. Jednotkou hladiny hlasitosti zvuku je fon (Ph), co do velikosti shodný s dB.

Hladiny hlasitosti jednoduchých tónů libovolné frekvence se určují ze středních hodnot výsledků pozorování většího počtu osob, naslouchajících těmto zvukům za stejných podmínek. Z těchto údajů pak můžeme sestrojit křivky stejných hladin hlasitosti pro celou oblast (slyšitelných) frekvencí a různých hladin intenzity srovnávaných zvuků (**obr.2.18**). Z obrázku je patrné, že hladiny intenzity (dB) a hladiny hlasitosti (Ph) se shodují pouze v poměrně úzkém intervalu frekvencí v okolí srovnávacího tónu 1kHz a že citlivost lidského ucha klesá směrem k oběma hranicím intervalu frekvencí, které je schopno slyšet.



Obr.2.18

Stejné zvýšení nebo snížení hladiny hlasitosti zvuku neodpovídá stejně velkému zesílení nebo zeslabení subjektivního sluchového vjemu. Např. tón o frekvenci 1kHz a hladině hlasitosti (intenzity) 50 Ph (50 dB) nevnímáme ani zdaleka o polovinu slaběji, než tón téže frekvence a hladině hlasitosti 100 Ph.

Subjektivní míru zvukového vjemu nazýváme **hlasitost** Ψ. Vztah mezi touto subjektivní veličinou a hladinou intenzity nebo hlasitosti zvuku lze určit díky tomu, že lidský sluchový orgán je schopen rozlišit dílčí nebo násobné části hlasitosti vnímaného zvuku. Postup je takový, že několik osob poslouchá tón zvolené intenzity, který v nich budí jistou hlasitost. Pak se hladina intenzity např. spojitě zmenšuje do okamžiku, kdy posluchači ohlásí snížení hlasitosti vnímaného zvuku na polovinu.

Srovnáním hladiny intenzity zvuku, při níž došlo u posluchačů k subjektivnímu poklesu jeho hlasitosti na polovinu s jeho původní hladinou intenzity, získáme empirickou (z výsledků pokusů plynoucí) závislost mezi hladinou intenzity B a subjektivně vnímanou hlasitostí Ψ daného zvuku.

Výsledky těchto a podobných pokusů ukázaly, že u srovnávacího tónu $(1\,\mathrm{kHz})$ vyvolá poloviční (nebo dvojnásobnou) vnímanou hlasitost snížení (nebo zvýšení) hladiny intenzity o $10\,\mathrm{dB}$. Za jednotku hlasitosti byl zvolen **son**, což je hlasitost, kterou vnímá průměrný posluchač, naslouchá-li oběma ušima tónu o frekvenci $1\,\mathrm{kHz}$ při hladině intenzity $40\,\mathrm{dB}$. Hlasitosti a hladiny hlasitosti zvuků z různých zdrojů uvádí následující tabulka.

Zvuk:	**Hladina hlasitosti Λ (Ph)**	**Hlasitost Ψ (son)**
Práh slyšení $(1\,\mathrm{kHz})$	0	0,06
Šumění listí, šepot	$10-20$	$0{,}13-0{,}25$
Normální hovor ve vzdálenosti 1*m*	50	2
Pouliční hluk	$60-70$	$4-8$
Silně reprodukovaná hudba (diskotéka)	80	16
Pneumatické kladivo	90	32
Hluk motoru letadla ve vzdálenosti několika *m*	120	256
Práh bolesti	130	512

RYCHLOST ZVUKU

Fázová rychlost vlnění (a tedy i zvuku) postupujícího látkovým prostředím závisí na **tuhosti vazeb** mezi jeho sousedními částicemi. S rostoucí tuhostí, vytvářenou silami jejich vzájemného působení, reagují (sousední) částice na kmitavý pohyb jedné z nich - rozruch - podstatně citlivěji ("čileji") a vlnění (i mechanická energie) postupuje daným prostředím rychleji. Proto je rychlost zvuku v pevných látkách a kapalinách zpravidla větší, než v plynech.

Rychlost zvuku (postupného podélného vlnění) ve vzduchu závisí na jeho vlhkosti, stupni a druhu znečištění, ale zejména na jeho **teplotě**. Výsledky četných pokusů potvrzují, že rychlost zvuku ve vzduchu nezávisí na frekvenci a atmosférickém tlaku a při teplotě $t\,(^{\circ}\mathrm{C})$ ji můžeme určit pomocí vztahu

$$v(t) = [331{,}82 + 0{,}61\{t\}]\,\mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

kde $\{t\}$ je číselná hodnota teploty vzduchu

Rychlosti zvuku v různých látkách jsou uvedeny v následující tabulce.

Látka	**Rychlost zvuku při** $20\ ^\circ C$ $\left(m \cdot s^{-1}\right)$
Beton	4700
Dřevo (borovice)	3600
Dřevo (dub)	4100
Mramor	6150
Kaučuk	1650
Křemen	5760
Led	3280
Měď	3800
Ocel	5100
Olovo	1200
Pískovec	2920
Porcelán	4880
Sklo	5270
Etylalkohol	1168
Glycerin	1923
Olej parafínový $\left(33{,}5\ ^\circ C\right)$	1420
Petrolej $\left(25\ ^\circ C\right)$	1315
Rtuť	1451
Voda	1483
Hélium $\left(0\ ^\circ C\right)$	971
Dusík $\left(0\ ^\circ C\right)$	334
Kyslík $\left(0\ ^\circ C\right)$	315
Svítiplyn $\left(13{,}6\ ^\circ C\right)$	453
Vodík $\left(0\ ^\circ C\right)$	1286
Vodní pára $\left(100\ ^\circ C\right)$	405

Odrazem zvukové vlny od větší překážky (skalní stěna, vyšší zeď apod.) může vzniknout **ozvěna** (echo). Lidské ucho rozliší dva po sobě následující zvuky jako různé, uplyne-li mezi jejich přijetím časový interval **alespoň** $0{,}1\,s$ (potřebný přibližně k vyslovení jedné slabiky). Pro vznik jednoslabičné ozvěny je tedy zapotřebí, aby překážka, odrážející zvukové vlny, byla od našeho ucha ve vzdálenosti přibližně $17\ m$. Je-li vzdálenost překážky větší, může odrazem zvuku na ní vzniknout ozvěna víceslabičná.

Při menších vzdálenostech překážky ucho původní a odražený zvuk od sebe nerozliší a dozvuk, vznikající splynutím vjemů obou zvuků, působí při poslechu rušivě. Akustické vlastnosti koncertních síní, sálů, hudebních studií, učeben apod. proto zlepšujeme členěním jejich stěn a obklady z materiálů silně pohlcujících zvukové vlny.

ULTRAZVUK A INFRAZVUK

Mechanické vlnění, jehož frekvence je větší než $16\,\mathrm{kHz}$, nazýváme **ultrazvuk**. Zdrojem ultrazvuku nízkého výkonu i frekvencí jsou např. speciální píšťalky. Značného výkonu a frekvencí až do $10^6\ \mathrm{kHz}$ lze dosáhnout chvěním těles vhodného tvaru a materiálu, vyvolaném vysokofrekvenčním magnetickým nebo elektrickým polem.

Vlnové délky ultrazvukových vln jsou velmi malé (např. frekvenci $20\,\mathrm{kHz}$ odpovídá ve vzduchu vlnová délka přibl. $1{,}7\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$). Proto se ultrazvuk postupující kolem běžných přírodních překážek prakticky vůbec neohýbá, takže ze směru jeho šíření můžeme poměrně přesně určit polohu jeho zdroje nebo tělesa, od něhož se odrazil.

Ve srovnání se zvuky, slyšitelnými lidským uchem, je ultrazvuk podstatně více pohlcován vzduchem a podstatně méně vodou. Proto může být např. používán jako komunikační prostředek pod vodní hladinou.

Ultrazvuk je pro lidské ucho neslyšitelný. Jeho vnímáním, vydáváním a pozoruhodným používáním jsou však nadáni četní živočichové. Např. netopýři a delfíni vysílají velmi krátké ultrazvukové signály, jež po odrazu od okolních předmětů s určitým zpožděním opět přijímají a provádějí tak velmi dokonalou **echolokaci** (určování polohy těles pomocí odrazu zvukových vln) svého okolí. Malé pohlcování ultrazvuku ve vodě umožňuje použití stejné metody přístrojem zvaným **sonar** (echolot) při měření hloubky a reliéfu mořského dna a při hledání těles pod vodní hladinou (ponorky, vraky potopených lodí, velká hejna ryb apod.)

Ultrazvukové píšťalky se používají při výcviku psů. Až do oblasti ultrazvuku zasahuje frekvenční rozsah mechanických vlnění, která slyší např. někteří hlodavci a další živočichové.

Ultrazvuk používáme i v mnoha dalších oblastech lidské činnosti, např.při hledání dutin, prasklin nebo jiných skrytých vad různých materiálů, **ultrazvuková sonografie** v lékařské diagnostice nahrazuje v řadě případů použití škodlivého rentgenova záření. Destrukčních účinků ultrazvukových vln využívají lékaři k rozrušování ledvinových kamenů.

Vysokofrekvenční vibrace, do nichž jsou uváděny částice prostředí, kterým se šíří ultrazvukové vlny, umožňují např.odstraňování nečistot z povrchu výrobků z drahých kovů, skel brýlí apod. Ultrazvuk pomáhá také při opracování nejtvrdších látek. Koná-li např. vrták kromě otáčivého ještě podélný kmitavý pohyb o frekvenci přibl. $25\,\mathrm{kHz}$, můžeme jej úspěšně použít k vrtání otvorů v látkách mnohem tvrdších než materiál, z něhož je vrták vyroben.

Mechanické vlnění, jehož frekvence je menší než přibl. $16\,\mathrm{Hz}$, nazýváme **infrazvuk**. Četné pokusy potvrzují, že infrazvukové vlny - pro člověka neslyšitelné - vnímá řada zejména mořských živočichů, např.medúzy, některé druhy ryb, kytovci. Podélné infrazvukové vlnění je málo pohlcováno vodou a představuje proto v rozlehlých prostorách moří pro tyto živočichy varovnou informaci o blížící se bouři. Existuje reálný předpoklad, že tito mořští, ale i četní suchozemští živočichové, slyší specifické infrazvukové vlny, předcházející zemětřesením nebo erupcím sopek, což by vysvětlovalo jejich mnohokrát pozorované zvláštní chování i útěk z míst, ohrožených těmito katastrofami.

ÚLOHY

1. Zvuk se šíří povrchem Země asi $13\,\text{krát}$ rychleji než ve vzduchu. Jaký časový interval uplyne mezi zachvěním zemského povrchu a zvukem exploze ve vzdálenosti $17\,\text{km}$ od místa výbuchu? $[46\,\text{s}]$

2. Frekvence ultrazvuku je $2{,}0\cdot 10^6\,\text{Hz}$. Určete jeho vlnovou délku ve vodě, v níž se šíří rychlostí $1500\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$? $[0{,}75\,\text{mm}]$

ŠÍŘENÍ VLNĚNÍ Z POHYBLIVÉHO ZDROJE, DOPPLERŮV JEV

Diváci rychlostních motocyklových nebo automobilových závodů mohou potvrdit, že při projíždění závodních strojů cílovou rovinkou dochází i při jejich víceméně stálé rychlosti (a stálých otáčkách motorů) k výraznému poklesu vnímané výšky (frekvence) zvuku , který jejich průjezd doprovází.

Tato změna vnímané (pozorované) frekvence vlnění, vyvolaná měnící se vzdáleností jeho zdroje a pozorovatele, se projevuje u vlnění jakéhokoliv druhu a nazývá se **DOPPLERŮV jev**.

Jestliže se zdroj vlnění a pozorovatel vůči sobě pohybují, pak při vzájemném přibližování vnímá pozorovatel vlnění o frekvenci vyšší a při vzájemném vzdalování naopak nižší, než je frekvence zdroje.

JOHANN CHRISTIAN DOPPLER (1803 - 1853). Rakouský fyzik,matematik a astronom. Profesor techniky v Praze a ve Vídni. Zabýval se zejména optikou a akustikou (aberace hvězd, teorie barev). Jev po něm pojmenovaný popsal poprvé v r.1842.

Vyšetřeme nyní ve vztažné soustavě klidné vůči homogennímu a izotropnímu prostředí, kterým se vlnění šíří, **dva** jednoduché případy **DOPPLEROVA** jevu.

1. Pozorovatel je v klidu a zdroj vlnění o frekvenci f, fázové rychlosti v a vlnové délce $\lambda = v/f$ se pohybuje konstantní rychlostí $u\,(u < v)$ po přímce, spojující jej s pozorovatelem (**obr.2.19a**).

Pohyb zdroje Z vnímá pozorovatel jako **změnu** vlnové délky vlnění, neboť vlnoplochy nejsou soustředné. Jestliže se zdroj přibližuje, jsou v místě pozorovatele P_1 vlnoplochy téže fáze "zhuštěné" a jejich vzdálenost - vlnová délka vnímaná pozorovatelem P_1 – je

$$\lambda' = \lambda - u\frac{\lambda}{v} = \frac{v-u}{v}\lambda = \frac{v-u}{f}.$$

Pozorovatel P_1 tedy vnímá vlnění o frekvenci

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v-u}f \Rightarrow f' > f,$$

která je **větší** než frekvence vlnění vysílaného zdrojem.

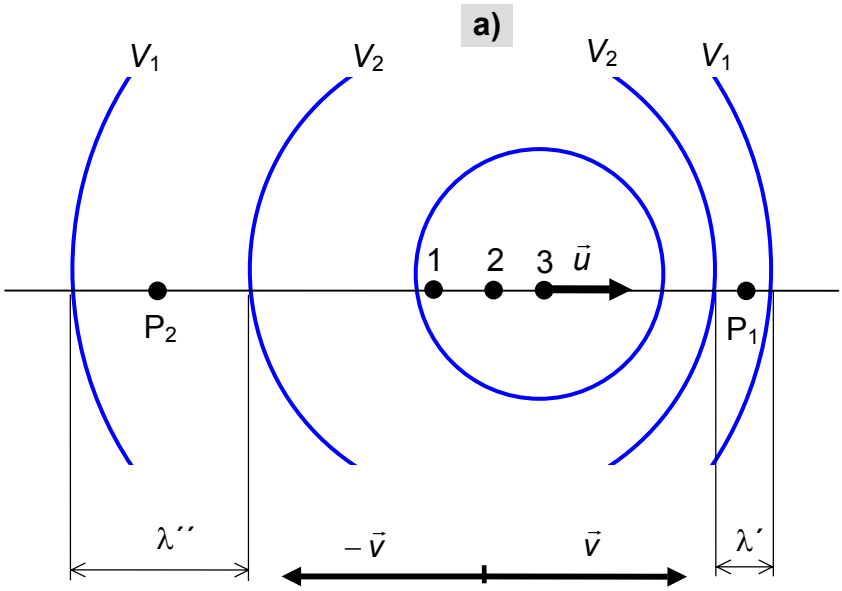
Vzdálenost vlnoploch v místě pozorovatele P_2, od něhož se zdroj **vzdaluje**, je naopak **větší** než vlnová délka λ zdrojem vysílaného vlnění a je rovna

$$\lambda'' = \lambda + u\frac{\lambda}{v} = \frac{v+u}{f}.$$

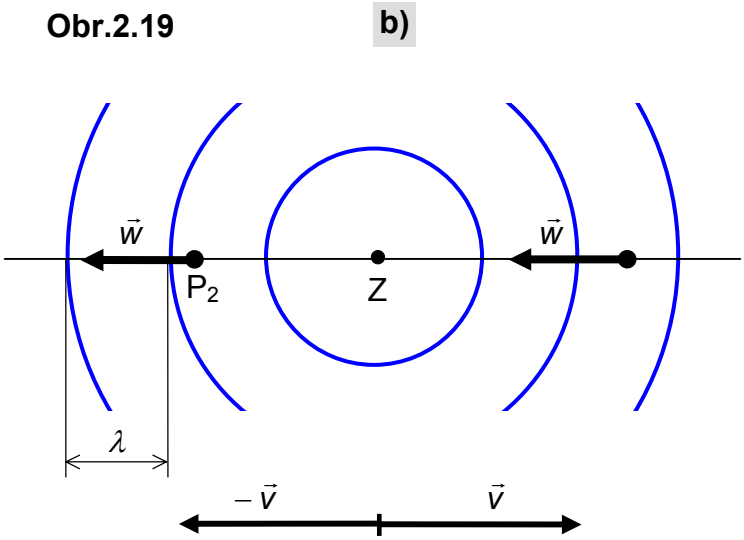
Proto pozorovatel P_2 vnímá frekvenci

$$f'' = \frac{v}{v+u} f \Rightarrow f'' < f,$$

která je **menší** než frekvence vlnění vysílaného pohybujícím se zdrojem.



Obr.2.19



2. Pozorovatel se **pohybuje** konstantní rychlostí $\vec{w}$ po přímce, na níž leží **klidný** zdroj vlnění (zvuku) o frekvenci f a fázové rychlosti $\vec{v}\ (v > w)$ - **obr.8.19b**.

Pro **přibližujícího se** pozorovatele P_1 jsou vektory $\vec{w}$ a $\vec{v}$ nesouhlasně rovnoběžné a velikost jeho relativní rychlosti vůči (proti němu) postupujícímu vlnění je rovna $|\vec{v}-\vec{w}|=v+w$. Počet vlnoploch téže fáze, vzdálených od sebe o vlnovou délku $\lambda = v/f$, které pozorovatel P_1 při svém přibližování ke klidnému zdroji "potká" za jednotku času, vnímá jako frekvenci:

$$f' = \frac{v+w}{\lambda} = \frac{v+w}{v} f \Rightarrow f' > f ,$$

která je **větší** než frekvence f vlnění.

Velikost relativní rychlosti vzdalujícího se pozorovatele P_2 vůči vlnění, které jej v tomto případě "dohání", je $v-u$ a jím vnímaná frekvence je tedy menší a rovna:

$$f'' = \frac{v-w}{\lambda} = \frac{v-w}{v} f \Rightarrow f'' < f .$$

S ohledem na směr vektorů $\vec{u},\vec{w}$ a $\vec{v}$ lze oba popsané případy kombinovat v situaci, kdy se zdroj i pozorovatel současně pohybují po téže přímce rychlostmi $\vec{u}$ a $\vec{w}$ a vlnění má v místě pozorovatele fázovou rychlost $\vec{v}$. Vztah pro frekvenci vlnění vnímanou pozorovatelem má v tomto případě tvar:

$$f' = \frac{|\vec{v}-\vec{w}|}{|\vec{v}-\vec{u}|} f .$$

Pohybuje-li se těleso v látkovém prostředí rychlostí **větší** než je fázová rychlost vlnění, stává se - aniž by se chvělo nebo kmitalo - zdrojem vlnění. K této situaci dochází při pohybu střel nebo při letu nadzvukových letadel. Čelní vlnoplocha takto vznikajícího vlnění má tvar velmi podobný kuželové ploše, v jejímž vrcholu se nachází pohybující se těleso. Změně tlaku, která se tímto vlněním šíří ve vzduchu a je zvláště v případě letu nadzvukových letadel značná (a nebezpečná našim uším a skleněným okenním tabulím), říkáme **rázová vlna**.

PŘÍKLAD

Porovnejte frekvence zvuků, které vnímá pozorovatel za následujících podmínek:

a) Pozorovatel se pohybuje v klidném vzduchu rychlostí o velikosti $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ směrem k nehybnému zdroji, vysílajícímu zvukové vlny o frekvenci $1000\,\mathrm{Hz}$.

b) Pozorovatel je v klidu a zdroj se pohybuje směrem k němu rychlostí o velikosti $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

c) Pozorovatel i zdroj se k sobě přibližují rychlostmi o velikosti $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ vzhledem ke klidnému vzduchu tak, že jejich rychlosti leží na téže přímce.

Řešení

Dané veličiny: rychlost pozorovatele: $u = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; rychlost zdroje: $w = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; rychlost vlnění: $v = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; frekvence vlnění vysílaného zdrojem : $1000\,\mathrm{Hz}$.

Úkol: výpočet frekvence f' zvuku vnímaného pozorovatelem

a) $u = 0$

$$f' = \frac{v + w}{v} f \Rightarrow f' = \frac{340 + 30}{340} 1000\,\text{Hz} \Rightarrow \quad f'_{\text{a}} = 1088\,\text{Hz}\,.$$

b) $w = 0$

$$f' = \frac{v}{v - u} f \Rightarrow f' = \frac{340}{340 - 30} 1000\,\text{Hz} \Rightarrow \quad f'_{\text{b}} = 1097\,\text{Hz}\,..$$

c) $\vec{w} \uparrow\downarrow \vec{u}$; $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{u}$; $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{w}$

$$f' = \frac{\left|\vec{v} - \vec{w}\right|}{\left|\vec{v} - \vec{u}\right|} f = \frac{v + w}{v - u} f \Rightarrow f' = \frac{340 + 30}{340 - 30} 1000\,\text{Hz} \Rightarrow \quad f'_{\text{c}} = 1194\,\text{Hz}\,.$$

Ve všech uvedených případech vnímá pozorovatel zvuk o **vyšší** frekvenci než je frekvence zvuku vysílaného zdrojem. Tato vnímaná frekvence je nejvyšší, jestliže se pozorovatel i zdroj při současném pohybu k sobě přibližují.

ÚLOHY

1. Jak velkou rychlostí se pohyboval závodní motocykl, jestliže poměr frekvence jím vydávaného zvuku při přibližování, vnímaná nehybným pozorovatelem, k frekvenci při jeho vzdalování byl $5/4$? $\left[37{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right]$

2. Píšťala lokomotivy vydává tón o frekvenci $576\,\text{Hz}$. Lokomotiva projíždí kolem pozorovatele, stojícího těsně u kolejí, rychlostí o velikosti $20{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jaký tón slyší pozorovatel při přibližování a vzdalování lokomotivy? Rychlost zvuku je $340\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. $\left[612\,\text{Hz}, 544\,\text{Hz}\right]$