VYBRANÉ PROBLÉMY Z MECHANIKY

UČEBNÍ TEXT KATEDRY FYZIKY PřF OU

L.SKLENÁK 2002

1. MECHANICKÉ KMITÁNÍ

KMITAVÝ POHYB

Významným a v přírodě velmi rozšířeným mechanickým pohybem je pohyb **periodický**, při němž hmotný bod (těleso) neustále opakuje svůj pohyb po téže trajektorii. Každé toto opakování daného pohybu proběhne za stejný časový interval - **periodu** pohybu T. Periodický pohyb konají např. hodinové ručičky, kyvadlo, houpačka, některé součásti strojů a technických zařízení, periodickým pohybem je otáčení Země kolem své osy i její pohyb kolem Slunce apod.

Převrácená hodnota periody T se nazývá **frekvence** (**kmitočet**) f periodického pohybu. Jednotkou této veličiny je **hertz** (Hz). Platí :

$$f = 1/T = T^{-1}\,;\,[f] = \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Hz}.$$

V praxi často používáme násobné jednotky - např. kHz, MHz, GHz.

Trajektorií periodického pohybu hmotného bodu je obecně **uzavřená** křivka - v jednoduchých případech je to elipsa nebo kružnice (pohyb Země kolem Slunce nebo pohyb koncového bodu hodinové ručičky). Je-li trajektorií periodického pohybu hmotného bodu **oblouk křivky** nebo **úsečka** (např. pohyb kyvadla nebo tělesa zavěšeného na konci pružiny), nazýváme tento pohyb **kmitavým pohybem** (**mechanickým kmitáním**).

Kmitavý pohyb je periodický pohyb hmotného bodu (tělesa), jehož trajektorií je úsečka nebo (velmi malý) oblouk křivky. Při kmitavém pohybu nepřekročí hmotný bod konečnou vzdálenost od jisté polohy, které říkáme rovnovážná poloha. Kmitající hmotný bod (těleso) nazýváme **mechanický oscilátor**.

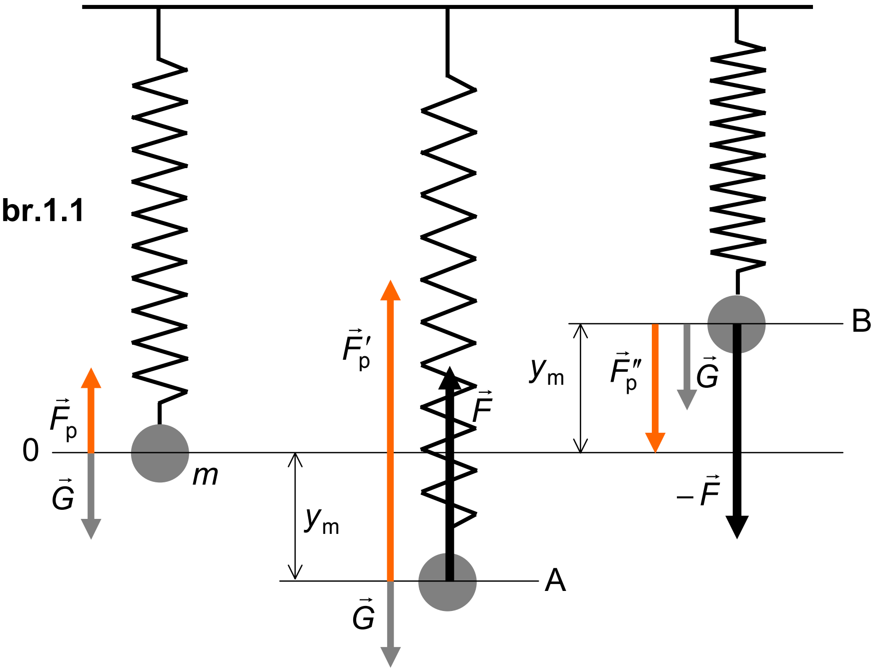
Jednoduchým modelem mechanického **oscilátoru** je kovová kulička zavěšená na konci ocelové pružiny, jejíž hmotnost je ve srovnání s hmotností kuličky velmi malá (**obr.1.1**).

V rovnovážném stavu (0) po zavěšení je výslednice **síly pružnosti** (**elastické síly**) $\vec{F}_{\mathrm{p}}$ pružiny a tíhové síly $\vec{F}_{\mathrm{G}} = \vec{G}$, působící na kuličku, nulová $\left(\vec{F}_{\mathrm{p}} + \vec{F}_{\mathrm{G}} = \vec{0}\,;\,\vec{F}_{\mathrm{p}} \uparrow\downarrow \vec{F}_{\mathrm{G}}\right)$ a kulička je v klidu v **rovnovážné poloze** (0). Na **obr.1.1** jsou skládané síly pro větší přehlednost zakresleny mimo své vektorové přímky.

Protažením pružiny, při němž se těžiště kuličky přemístí do bodu A, dojde ke zvětšení síly pružnosti a nenulová výsledná síla $\left(\vec{F} = \vec{F}_{\mathrm{p}}' + \vec{F}_{\mathrm{G}}\,;\,\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{F}_{\mathrm{p}}'\right)$ působící na kuličku, má směr síly pružnosti. Po uvolnění se proto kulička začne pohybovat přímočarým **zrychleným** pohybem vzhůru ve směru síly $\vec{F}$. V důsledku setrvačnosti svého pohybu projde rovnovážnou polohou (0) a pokračuje ve svém, za rovnovážnou polohou již **zpomaleném** a pružinu stlačujícím pohybu do bodu B. Fixujeme-li vhodnými ukazovateli polohu bodů (0), A a B, vidíme, že vzdálenost bodů A a B od rovnovážné polohy (0) je **stejná**.

$\left(-\vec{F} = \vec{F}_{\mathrm{p}}'' + \vec{F}_{\mathrm{G}}\,;\,-\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{F}_{\mathrm{p}}'\right)$, mající směr tíhové síly. Kulička se proto začne z bodu B pohybovat **zrychleně** směrem dolů a projde v důsledku setrvačnosti rovnovážnou polohou (0). Za rovnovážnou polohou pak pokračuje ve **zpomaleném**, pružinu roztahujícím pohybu až do bodu A, v němž se opět na okamžik zastaví a celý, dosud popsaný pohyb kuličky se začne opakovat.

Obr.1.1



V bodě B, v němž se kulička na okamžik zastaví, na ni působí výsledná síla -

Časový interval, potřebný k pohybu kuličky z bodu A do bodu B a zpět do výchozího bodu A - k vykonání jednoho **kmitu** oscilátoru, je **periodou** neboli **dobou kmitu** T kmitavého pohybu.

I přes stručnost popisu tohoto experimentu je z něj možno získat důležitý a zajímavý poznatek - kmitavý pohyb kuličky zavěšené na pružině je způsoben silou **proměnné** velikosti, směřující neustále do **rovnovážné polohy** (0). Tato síla vzniká při (pružné) deformaci pružiny, na níž je kulička zavěšena.

Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic s počátkem 0 v rovnovážné poloze (0) kmitajícího hmotného bodu (**těžiště** kuličky), můžeme jeho okamžitou polohu popsat souřadnicemi (**obr.1.2**). Při této volbě počátku je polohový vektor kmitajícího hmotného bodu vektorem jeho **okamžité výchylky**. Kmitá-li hmotný bod ve směru souřadnicové osy y, označujeme vektor jeho okamžité výchylky jako $\vec{y}(t)$. **Směr** vektoru okamžité výchylky vzhledem k ose y je dán jeho **souřadnicí** $\vec{y}(t)$ jeho **koncového bodu**. Pro $\vec{y}(t)\uparrow\uparrow\vec{j}$ je tato souřadnice **kladná**, pro $\vec{y}(t)\uparrow\downarrow\vec{j}$ **záporná**.

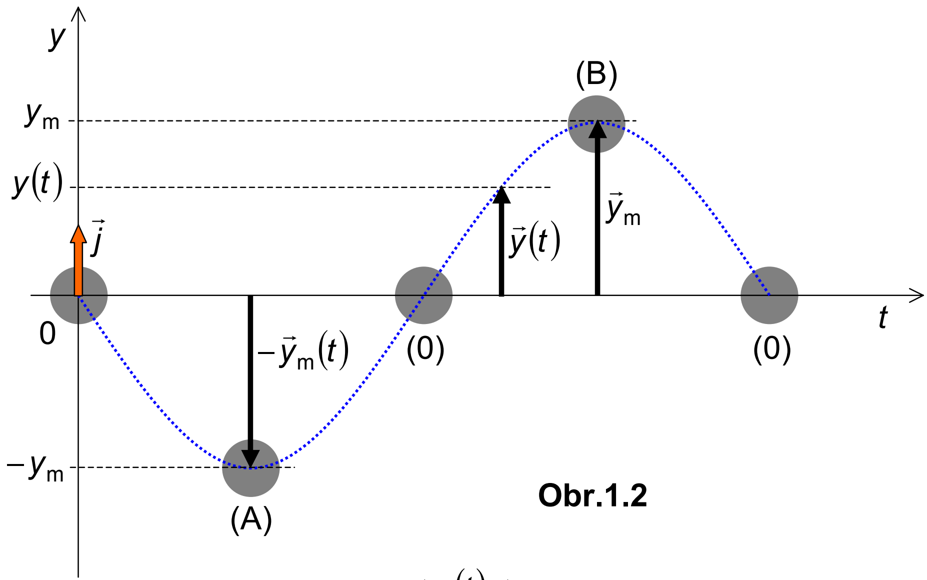
Pro větší stručnost budeme v dalším textu přesný termín vektor okamžité výchylky někdy nahrazovat kratším termínem okamžitá výchylka a s ohledem na souřadnici tohoto vektoru hovořit o kladné, záporné, příp. nulové okamžité výchylce oscilátoru.

Při průchodu kmitajícího oscilátoru **rovnovážnou polohou** je vektor jeho okamžité výchylky nulový $(y=0)$. Nachází-li se oscilátor v některém z **bodů obratu** $(\mathrm{A,B})$, má v tomto okamžiku vektor jeho okamžité výchylky **maximální** velikost y_m, nazývanou **amplituda** (výchylky) kmitavého pohybu.

ROVNICE JEDNODUCHÉHO KMITAVÉHO POHYBU

Pokusme se nyní na základě popisu kmitavého pohybu pružinového oscilátoru najít matematickou závislost souřadnice $y(t)$ vektoru jeho okamžité výchylky $\vec{y}(t)$ na čase.

1. Kmitavý pohyb těžiště kuličky je přímočarý a probíhá mezi body obratu A a B, ležícími na ose y (**obr.1.1, 1.2**). Hledaná časová závislost - funkce $y = y(t)$ - tedy musí splňovat podmínku



Obr.1.2

$$-y_m \le y(t) \le y_m .$$

2. Kmitavý pohyb je periodický s periodou T (a frekvencí f). Hledaná funkce proto musí být **periodickou** funkcí **času**, pro níž platí

$$y(t) = y(t+T) = y(t+2T) = y(t+3T) = \cdots = y(t+nT),$$

kde n je přirozené číslo (v současné době patří mezi přirozená čísla i **nula**).

3. Při průchodu kuličky rovnovážnou polohou se mění směr na ni působící (pružné) síly a její přímočarý pohyb se proto mění z pohybu zrychleného ve zpomalený. V bodech obratu A a B (při maximální velikosti výchylky z rovnovážné polohy) se proto kulička (oscilátor) na okamžik **zastaví** a mění **směr** vektoru okamžité **rychlosti**. V bodech obratu je tedy velikost jeho rychlosti **nulová**.

Z bodů obratu A, B se kulička pohybuje **zrychleným** pohybem a při průchodu rovnovážnou polohou je velikost její okamžité rychlosti **maximální**. Proto se funkce $y = y(t)$ v okolí rovnovážné polohy mění podstatně rychleji než v okolí bodů obratu.

4. Začneme-li měřit čas např. v okamžiku, kdy těžiště kuličky při pohybu směrem vzhůru $(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$ prochází rovnovážnou polohou a jeho okamžitá výchylka je nulová, platí pro hledanou periodickou funkci

$$y(0) = y(T) = y(2T) = y(3T) = \cdots = y(nT) = 0 .$$

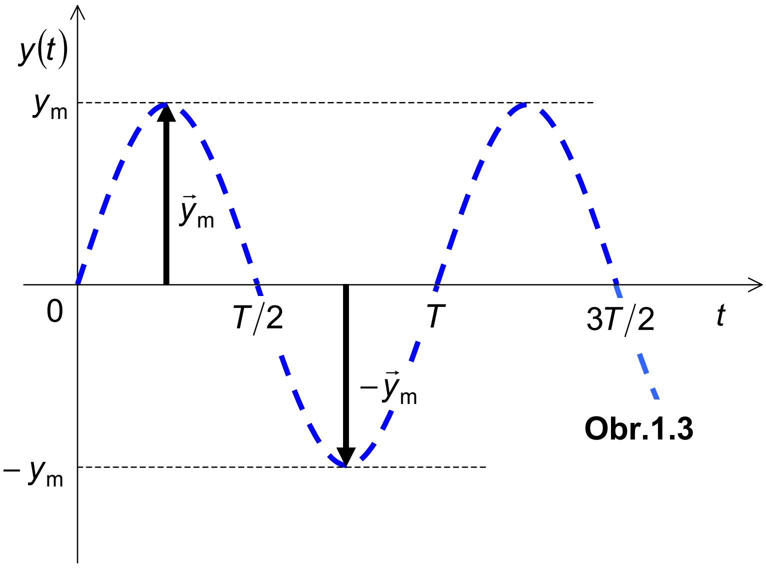
Vzhledem k tomu, že pohyb kuličky z bodu B do bodu A se kromě směru nijak neliší od jejího pohybu z bodu A do bodu B, můžeme předpokládat (a výsledky pokusů to potvrzují), že pohyby $0 \to \mathrm{B} \to 0$ a $0 \to \mathrm{A} \to 0$ trvají stejnou dobu - mezi dvěma po sobě následujícími průchody kuličky rovnovážnou polohou tedy uplyne právě **polovina periody** jejího kmitavého pohybu. Proto při dané volbě počátku měření času platí také

$$y(T/2) = y(3T/2) = y(5T/2) = y(7T/2) = \cdots = 0 .$$

Zcela obdobnou úvahou bychom dospěli k dalším podmínkám

$$y(T/4) = y(5T/4) = y(9T/4) = \cdots = y_m ;\; y(3T/4) = y(7T/4) = y(11T/4) = \cdots = -y_m .$$

Vezmeme-li na pomoc matematiku, vidíme, že všechny požadavky na funkci $y = y(t)$, vyjadřující časovou závislost souřadnice vektoru okamžité výchylky kmitajícího pružinového oscilátoru, splňuje **periodická** funkce **sinus** (**obr.1.3**) nebo **kosinus** úhlu, rostoucího přímo úměrně s časem.

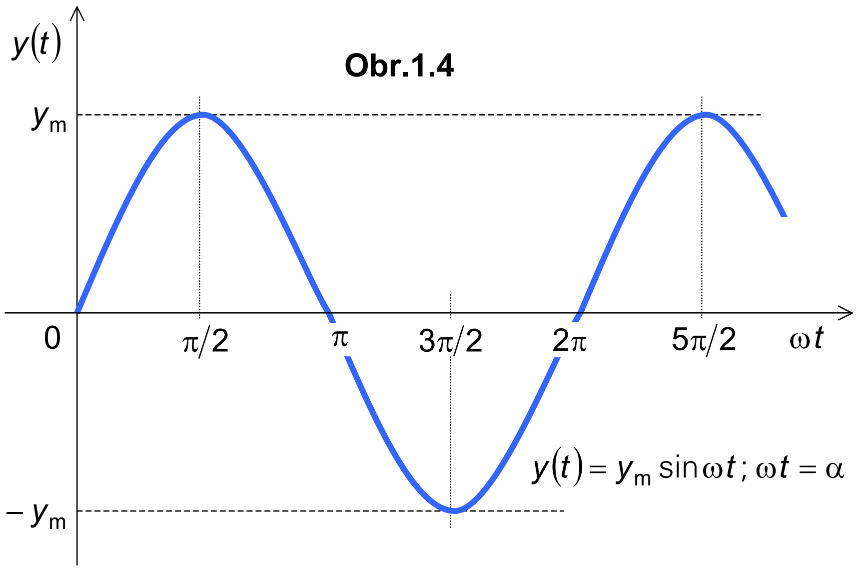


Obr.1.3

V matematice byly **goniometrické** funkce zprvu definovány pro **ostré** úhly v pravoúhlém trojúhelníku. Definiční obor těchto funkcí však lze však bez omezení rozšířit a definovat je pro libovolnou hodnotu rovinného úhlu - pro tzv. **obecný** úhel α, vyjádřený obvykle v **radiánech**.

Abychom mohli tyto funkce použít k matematickému vyjádření časové závislosti veličin popisujících pohyb mechanického oscilátoru, musí mít **argument** těchto funkcí (vyjádření časově proměnného úhlu; výraz, do něhož dosazujeme čas) rozměr rovinného úhlu (jednotkou argumentu musí být **radián**).

Obr.1.4



Čas t tedy musíme násobit vhodnou konstantní veličinou (označme ji ω) tak, aby jednotkou součinu této veličiny a času byl radián (jehož rozměr je 1). Z tohoto požadavku plyne

$$\alpha = \omega t \Rightarrow [\omega]\cdot \mathrm{s} = 1 \Rightarrow [\omega] = \mathrm{s}^{-1};\ \sin\alpha = \sin\omega t\,.$$

Periodou funkce sinus (i kosinus) je 2π (radiánů) a proto platí

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + n2\pi);\ n \text{ je celé číslo.}$$

Má-li mít funkce $\sin\omega t$ periodu T, a tedy

$$\sin\omega t = \sin\omega(t + nT) = \sin(\omega t + n\omega T),$$

musí platit: $n2\pi = n\omega T$. Odtud dostáváme $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Na základě těchto poznatků můžeme vyslovit následující závěr:

Kmitavý pohyb pružinového oscilátoru můžeme popsat časovou závislostí **souřadnice** vektoru jeho okamžité výchylky z rovnovážné polohy ve tvaru

$$y(t) = y_{\mathrm{m}} \sin\omega t,$$

nebo také vektorovou rovnicí

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_{\mathrm{m}} \sin\omega t.$$

Grafické znázornění této závislosti (**obr.1.4**) má tvar části **sinusoidy**, která prochází počátkem soustavy souřadnic a je v tomto bodě **rostoucí**. Skalární veličinu ω, nazývanou **úhlová frekvence** kmitavého pohybu, určíme ze vztahu

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f;\ [\omega] = \mathrm{s}^{-1},$$

v němž T je **perioda** a f **frekvence** kmitavého pohybu.

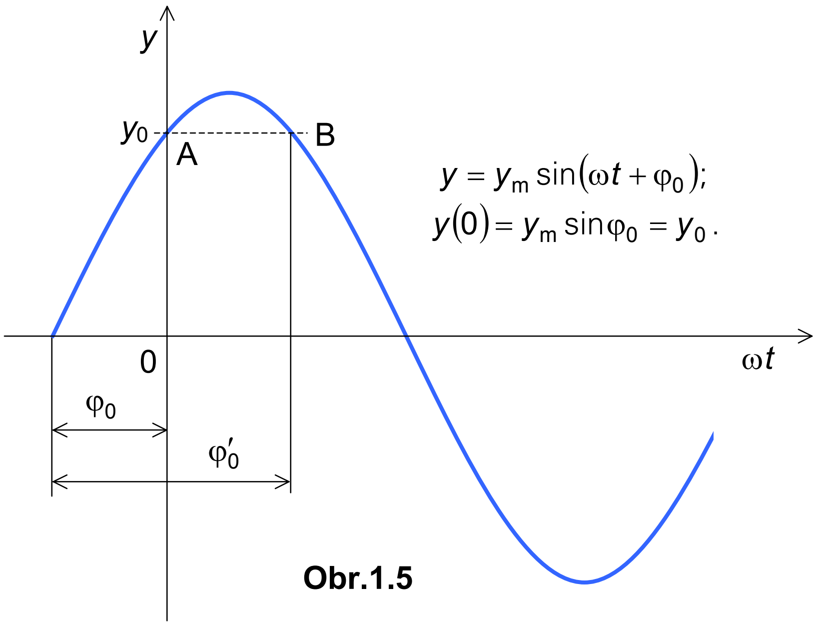
Kmitavý pohyb, jehož okamžitá výchylka se mění s časem tak jako goniometrická funkce sinus (nebo kosinus) obecného úhlu, nazýváme **jednoduchý kmitavý pohyb** nebo také **harmonický pohyb**. Rovnice $y(t) = y_{\mathrm{m}} \sin\omega t$ se nazývá základní rovnice harmonického pohybu a oscilátoru (kmitajícímu harmonicky) říkáme **harmonický oscilátor**.

Zdůrazněme, že o harmonickém pohybu nebo o harmonické změně nějaké veličiny mluvíme právě tehdy, má-li graf časové závislosti okamžité výchylky nebo okamžité hodnoty této veličiny tvar sinusoidy.

Graf časové závislosti okamžité výchylky na **obr.1.4** prochází počátkem soustavy souřadnic [bodem odpovídajícím okamžiku $t = 0$ a (nulové) okamžité výchylce $y(0) = 0$] a je v tomto bodě rostoucí funkcí času. Znamená to, že v počátečním okamžiku měření času prochází oscilátor rovnovážnou polohou a pohybuje se v kladném směru osy y (ve směru bázového vektoru $\vec{j}$).

Tato podmínka však není závazná a za počátek měření času můžeme zvolit libovolný okamžik - při libovolné počáteční výchylce - v libovolné **fázi** periodického pohybu oscilátoru. V tomto případě však musíme při grafickém znázornění časové závislosti okamžité výchylky "posunout" sinusoidu podél časové osy tak, aby druhá souřadnice jejího průsečíku s osou y byla rovna obecně nenulové počáteční výchylce oscilátoru $y(0) = y_0$. Současně je však nutno **růstem** nebo **poklesem** sinusoidy v tomto bodě zohlednit **směr** pohybu oscilátoru v okamžiku $t = 0$. Na

obr.1.5 představují body A a B dvě **různé** fáze harmonického pohybu, při nichž má oscilátor tutéž velikost okamžité výchylky, ale pohybuje se **opačným** směrem.



Obr.1.5

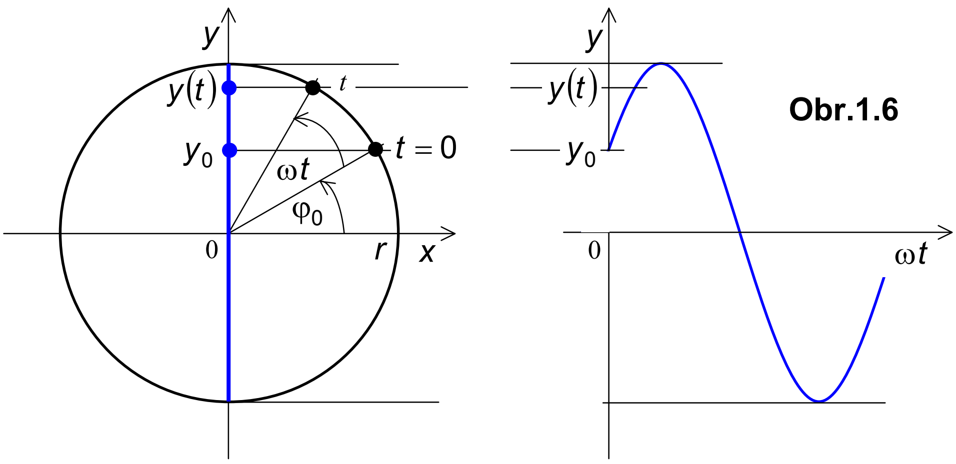
Z tohoto důvodu je nutno počáteční výchylku $y(0) = y_0$ harmonického pohybu vyjádřit jako

$$y(0) = y_0 = y_m \sin\varphi_0 ,$$

takže rovnice harmonického pohybu má v tomto případě tvar:

$$\boxed{y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)}$$

Časově proměnný výraz (úhel) $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ v této rovnici, který rozhoduje o velikosti i směru okamžité výchylky, nazýváme **okamžitá fáze** harmonického pohybu. **Konstantní** veličina (úhel) $\varphi_0 = \varphi(0)$ je jeho **počáteční fáze**.



Obr.1.6

Pozorujeme-li **rovnoměrný** pohyb hmotného bodu (kuličky) po kružnici z boku v rovině jeho trajektorie (**obr.1.6**), vidíme, že kulička koná **kmitavý** pohyb, jehož amplituda výchylky je rovna poloměru kružnice. Při tomto směru pozorování promítáme rovinný pohyb po kružnici kolmo do jejího (při bočním pohledu) svislého průměru.

Na **obr.1.6** je tento "promítací" průměr částí osy y kartézské soustavy souřadnic. Toto pozorované "kmitání" kuličky můžeme tedy popsat podobně jako v předchozích případech časovou závislostí $y(t)$ druhé souřadnice (těžiště) kuličky při jejím rovnoměrném pohybu po kružnici o poloměru r konstantní úhlovou rychlostí $\omega = v/r$.

Z **obr.1.6** je patrné, že kolmý průmět kuličky (hmotného bodu) do osy y koná **harmonický** pohyb o rovnici

$$y(t) = r\sin(\omega t + \varphi_0),$$

jehož amplituda výchylky je rovna poloměru kružnice $(y_m = r)$ a úhlová frekvence ω je rovna velikosti úhlové rychlosti rovnoměrného pohybu po kružnici. Počáteční fáze harmonického pohybu je rovna úhlu φ_0, svíranému průvodičem hmotného bodu a kladnou poloosou x v okamžiku $t = 0$.

POZNÁMKA

Kdybychom pozorovali rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici na **obr.1.5 shora** - promítali jej do osy x, zapsali bychom časovou závislost jeho okamžité výchylky $x(t)$ jako

$$x(t) = r\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Použijeme-li vzorce $\sin(\alpha + \pi/2) = \sin\alpha\cos\pi/2 + \cos\alpha\sin\pi/2 = \cos\alpha$, můžeme tuto závislost zapsat ve tvaru

$$x(t) = r\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2).$$

Kolmý průmět kuličky do osy x tedy koná harmonický pohyb, jehož fáze se od fáze harmonického pohybu průmětu do osy y liší o $\pi/2$ (radiánů). Uvážíme-li tuto skutečnost, můžeme vyslovit zajímavý poznatek.

Rovnoměrný pohyb hmotného bodu úhlovou rychlostí ω po kružnici o poloměru r lze chápat jako pohyb, **složený** ze dvou jeho navzájem kolmých harmonických kmitání se společnou rovnovážnou polohou, stejnou úhlovou frekvencí ω i amplitudou výchylky r, jejichž fáze se navzájem liší o $\pi/2$ (radiánů).

PŘÍKLAD

Určete amplitudu výchylky, úhlovou frekvenci, frekvenci a periodu a počáteční fázi harmonického pohybu o rovnici $y(t) = 0{,}040\sin 4\pi(t + 1/12)$. Určete dále počáteční výchylku oscilátoru a okamžiky **a)** průchodu oscilátoru rovnovážnou polohou, **b)** v nichž má kladnou maximální výchylku,

ŘEŠENÍ

Upravíme-li danou rovnici do tvaru

$$y(t) = 0{,}040\sin(4\pi t + \pi/3)$$

a srovnáme-li ji s obecným tvarem rovnice harmonického pohybu s nenulovou počáteční fází

$$y(t) = y_m\sin(\omega t + \varphi_0),$$

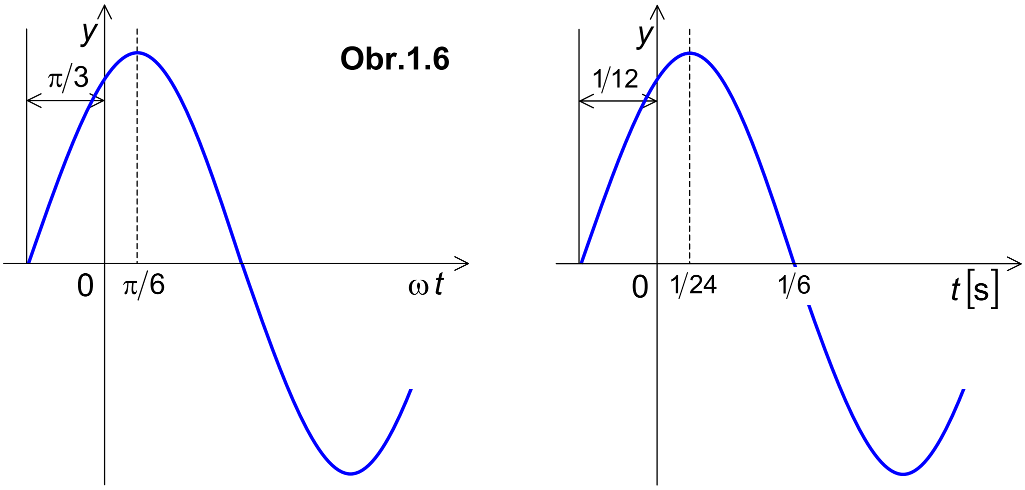
dostáváme pro zkoumaný harmonický pohyb

$$y_m = 0{,}040\,\mathrm{m};\ \omega = 4\pi\,\mathrm{s}^{-1};\ \varphi_0 = \pi/3\,(\mathrm{rad});\ f = \omega/2\pi \Rightarrow\ f = 2\,\mathrm{Hz};$$

$$T = 2\pi/\omega \Rightarrow\ T = 0{,}5\,\mathrm{s}.$$

Počáteční výchylka

$$y(0) = 0{,}040\sin\pi/3 \Rightarrow\ y(0) = y_0 = 0{,}035\,\mathrm{m}.$$



Obr.1.6

Okamžik prvního průchodu rovnovážnou polohou po počátku měření času

$$y(t_1) = 0{,}040\sin(4\pi t_1 + \pi/3) = 0 \wedge t_1 > 0 \Rightarrow\ 4\pi t_1 + \pi/3 = \pi \Rightarrow\ t_1 = 1/6\ \mathrm{s}\ .$$

K dalším průchodům oscilátoru rovnovážnou polohou dochází v okamžicích, lišících se od t_1 o celý kladný násobek poloviny periody $(nT/2)$. Pro okamžik t_n průchodu $n-$tou rovnovážnou polohou tedy platí (n je kladné celé číslo)

$$t_n = t_1 + (n-1)\frac{T}{2} \Rightarrow t_n = \frac{1}{6} + (n-1)\frac{1}{4} \Rightarrow\ t_n = \frac{1}{12}(3n-1).$$

Okamžiky dosažení **kladné** maximální výchylky určíme z podmínky (m je kladné celé číslo)

$$y(t_m) = 0{,}040\sin(4\pi t_m + \pi/3) = +0{,}040 \Rightarrow\ \sin(4\pi t_m + \pi/3) \Rightarrow$$

$$4\pi t_m + \pi/3 = \pi/2 + (m-1)2\pi \Rightarrow\ t_m = m/2 - 11/24.$$

ÚLOHY

1. Lidské srdce vykoná průměrně 75 tepů za minutu. Určete periodu a frekvenci srdeční činnosti. $[0{,}8\,\mathrm{s}; 1{,}25\,\mathrm{Hz}]$

2. Vysvětlete rozdíl mezi periodickým a harmonickým pohybem.

3. Napište základní rovnici pohybu harmonického oscilátoru, jehož amplituda výchylky je 3,0 cm a perioda 0,20 s. $[y = 0{,}03\sin 10\pi t]$

4. Hmotný bod kmitá harmonicky s amplitudou výchylky 0,20 m. Určete jeho okamžité výchylky v okamžicích $T/4, T/3, T/2$, byla -li jeho počáteční výchylka nulová. $[20\,\mathrm{cm}, 20\,\mathrm{cm}, 0]$

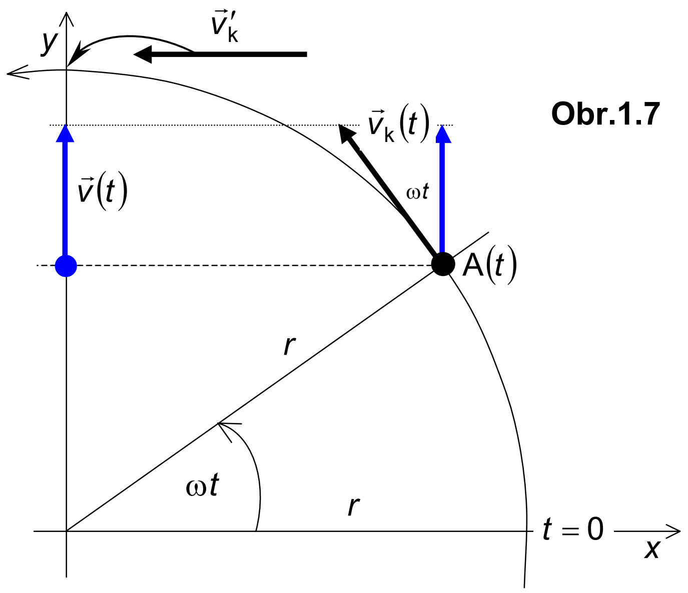
5. Napište rovnici harmonického kmitání, jehož amplituda výchylky je $y_m = 10\ \mathrm{cm}$ a perioda $T = 2\,\mathrm{s}$. Napište rovnici harmonických kmitů, jejichž amplituda je poloviční a frekvence dvojnásobná vzhledem k předchozímu případu. $[y = 0{,}1\sin\pi t$; $y = 0{,}05\sin 2\pi t]$

6. Určete frekvenci harmonického pohybu oscilátoru, který za 0,1s po průchodu rovnovážnou polohou vykoná 1/8 svého kmitu. $[f = 5/6\ \text{Hz}]$

RYCHLOST HARMONICKÉHO POHYBU

Kolmé promítnutí hmotného bodu, pohybujícího se rovnoměrně po kružnici do libovolného průměru jeho trajektorie, je výhodné i při získání poznatků o okamžité **rychlosti** a okamžitém **zrychlení** harmonického pohybu.

Na **obr.1.7** je znázorněn vektor $\vec{v}_\mathrm{k}(t)$ okamžité rychlosti rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici.



Obr.1.7

Kolmý průmět vektoru $\vec{v}_\mathrm{k}(t)$ do osy y představuje vektor $\vec{v}(t)$ **okamžité rychlosti harmonického** pohybu kolmého průmětu pohybu hmotného bodu do této osy.

Z **obr.1.7** je dále patrné, že vektor okamžité rychlosti $\vec{v}(t)$ harmonického pohybu se mění v závislosti na čase tak, že v bodech obratu, v nichž je okamžitá výchylka oscilátoru maximální, je velikost jeho rychlosti **nulová**. V těchto bodech mění vektor $\vec{v}(t)$ svůj **směr**. Maximální velikosti (**amplitudy** rychlosti $v = v_\mathrm{m} = v_\mathrm{k}$) dosahuje vektor $\vec{v}(t)$ při průchodu oscilátoru rovnovážnou polohou, v níž je jeho okamžitá výchylka nulová. Pro **souřadnici** $v(t)$ vektoru $\vec{v}(t)$ okamžité rychlosti harmonického pohybu tedy platí

$$-v_\mathrm{k} \le v(t) \le v_\mathrm{k}\,.$$

Pohybuje-li se promítaný hmotný bod po kružnici o poloměru r konstantní úhlovou rychlostí $\omega = v_\mathrm{k}/r$, můžeme pomocí **obr.1.7** vyjádřit časovou závislost souřadnice vektoru okamžité rychlosti harmonického pohybu jeho kolmého průmětu do osy y ve tvaru

$$v(t) = v_\mathrm{k}\cos\omega t\,.$$

Pomocí součtového vzorce $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, v němž položíme $\alpha=\omega t$, $\beta=\pi/2$ dostaneme $\sin(\omega t+\pi/2)=\cos\omega t$ a použitím vztahů $v_k=r\omega$, $r=y_m$, můžeme tuto časovou závislost vyjádřit jako

$$v(t)=\omega y_m \sin(\omega t+\pi/2),$$

nebo vektorově

$$\boxed{\vec{v}(t)=\omega\vec{y}_m \sin(\omega t+\pi/2)}$$

Porovnání těchto výrazů se **základní** rovnicí harmonického pohybu $y(t)=y_m \sin\omega t$ umožňuje vyslovit následující tvrzení

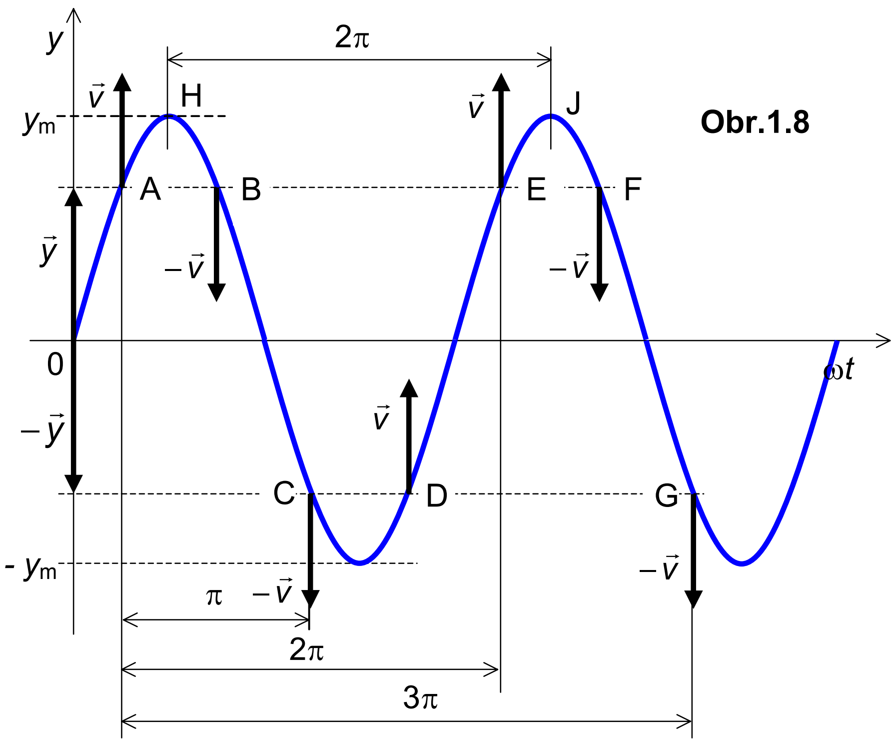
1. Souřadnice vektoru okamžité rychlosti harmonického pohybu je periodickou funkcí času a mění se s časem **harmonicky**.

2. Frekvence harmonicky kmitajícího oscilátoru je **stejná** jako frekvence periodických změn jeho **rychlosti**.

3. Je-li ω úhlová frekvence harmonického pohybu a y_m amplituda jeho výchylky, má **amplituda rychlosti** tohoto pohybu hodnotu $v_m=\omega y_m$.

4. Je-li pohyb popsán rovnicí $y(t)=y_m \sin\omega t$ má **počáteční** fáze harmonické časové závislosti **rychlosti** (vyjádřená pomocí funkce **sinus**) tohoto pohybu hodnotu $\pi/2$, takže platí $v(0)=v_m=\omega y_m$.

Libovolná **fáze** harmonického pohybu je charakterizována jak vektorem okamžité **výchylky** oscilátoru, tak i vektorem jeho okamžité **rychlosti**. S výjimkou **bodů obratu** má totiž vektor okamžité rychlosti v každém bodě trajektorie **tutéž** vektorovou přímku, ale **dvojí** možný **směr**.



Obr.1.8

Při **stejných** (jinak však libovolných) **fázích** (téhož) harmonického pohybu má tedy oscilátor tentýž vektor okamžité výchylky i tentýž vektor okamžité rychlosti. **Ty fáze** harmonického pohybu, při nichž se oscilátor nachází v **bodech obratu** a jeho rychlost je nulová, lze jednoznačně porovnat pomocí vektorů okamžité výchylky $(\vec{y}_m, -\vec{y}_m)$. **Stejnou** fázi má harmonický pohyb znázorněný na **Obr.1.8** v bodech A a E. Jinou, ale opět **stejnou** fázi pohybu oscilátoru představují body B a F, příp. C a G, H a J.

Jsou-li při dvou různých fázích harmonického pohybu vektory okamžité výchylky i vektory okamžité rychlosti oscilátoru opačnými vektory (stejná velikost, opačný směr), nazýváme tyto fáze **opačné**. Na **obr.1.8** jsou opačné fáze harmonického pohybu představovány dvojicemi bodů AC, AG, BD, EG.

Vzhledem k periodičnosti harmonického pohybu je hodnota **fázového rozdílu** jeho libovolných dvou **stejných** fází rovna **celému** násobku 2π a časový interval mezi nimi je roven (témuž) **celému** násobku periody T harmonického pohybu. Fázový rozdíl libovolné dvojice **opačných** fází je roven **lichému** násobku π a časový interval mezi nimi je roven (témuž) **lichému** násobku $T/2$.

Při převádění fázového rozdílu (posunutí) libovolných dvou fází téhož harmonického pohybu na jejich časové posunutí, vyjádřené zpravidla násobkem periody, postupujeme následujícím způsobem. Vyjádříme obě fáze jako

$$\varphi(t_1) = \omega t_1 + \varphi_0\,;\ \varphi(t_2) = \omega t_2 + \varphi_0$$

a určíme **fázový rozdíl** $\Delta\varphi$ jako

$$\Delta\varphi = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t$$

Časový interval mezi těmito fázemi neboli jejich časové posunutí Δt je pak

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}.$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu příslušnou hodnotu fázového rozdílu $\Delta\varphi$ v radiánech a úhlové frekvenci ω, dostaneme hodnotu časového posunutí Δt uvažovaných fází harmonického pohybu.

Vyjádříme-li úhlovou frekvenci výrazem $\omega = 2\pi/T$, dostaneme hodnotu hledaného časového posunutí ve tvaru **násobku periody** uvažovaného harmonického pohybu.

Jsou-li např.dvě fáze harmonického pohybu posunuty o $\Delta\varphi = 3\pi/8$ (radiánů), je jejich časové posunutí

$$\Delta t = \frac{3\pi}{8}\frac{T}{2\pi} \Rightarrow\ \Delta t = \frac{3}{16}T\,.$$

Mají-li **harmonické** časové závislosti různých veličin stejnou periodu, můžeme porovnáním jejich fází v libovolném okamžiku zjistit jejich **stálé** vzájemné **fázové** nebo **časové posunutí**. Porovnáme-li takto harmonické časové závislosti **okamžité výchylky** a **okamžité rychlosti** harmonického pohybu (**obr.1.9**), zjistíme, že tyto závislosti jsou **fázově** posunuty o $\pi/2$ (radiánů), neboť

$$\Delta\varphi = \varphi_v - \varphi_y = \omega t + \pi/2 - \omega t = \pi/2\,.$$

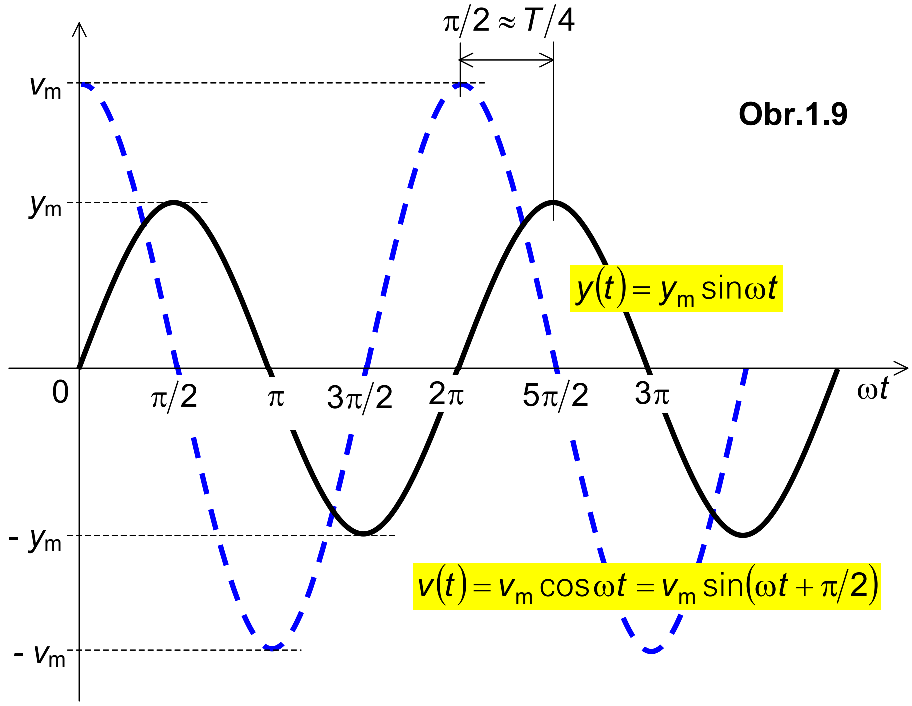
Časové posunutí těchto závislostí je

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\pi}T \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4},$$

takže můžeme říci, že harmonická závislost okamžité rychlosti **předbíhá** harmonickou závislost okamžité výchylky o **čtvrtinu periody**. Vzhledem k tomu můžeme časovou závislost okamžité rychlosti zapsat ve tvaru $v(t) = \omega y(t + T/4)$, nebo vektorově $\vec{v}(t) = \omega \vec{y}(t + T/4)$.

Souřadnici $v(t)$ vektoru $\vec{v}(t)$ okamžité rychlosti harmonického pohybu je možno tedy zapsat jako

$$v(t) = \omega y_m \sin\omega(t + T/4) = v_m \sin(\omega t + \pi/2).$$



Obr.1.9

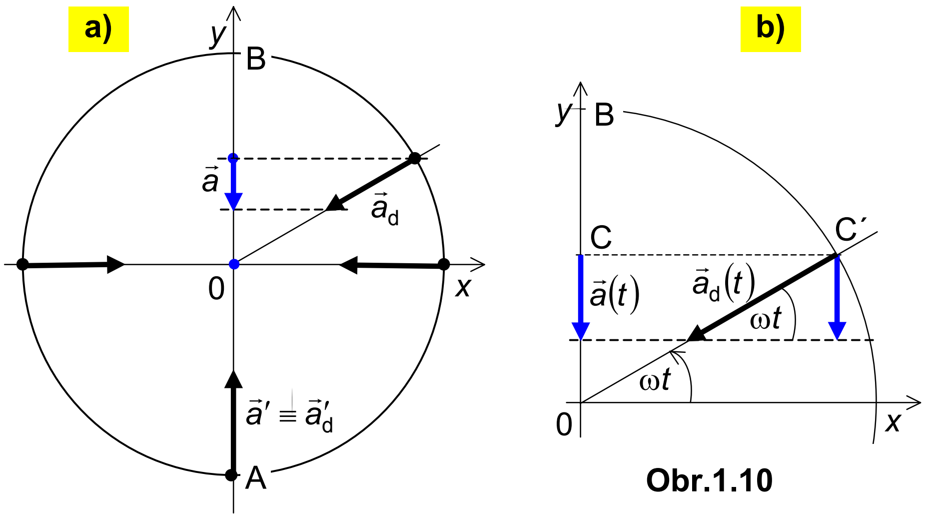
ZRYCHLENÍ HARMONICKÉHO POHYBU

Kolmé promítnutí rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici do jejího průměru můžeme použít i pro získání informací o zrychlení (nerovnoměrného) harmonického pohybu.

Rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici o poloměru r úhlovou rychlostí je pohyb s dostředivým zrychlením $\vec{a}_d$, které mění **pouze směr** vektoru $\vec{v}_k$ okamžité rychlosti hmotného bodu. Pro velikost tohoto zrychlení platí $a_d = v_k^2/r = \omega^2 r$.

Na **obr.1.10a** jsou znázorněny vektory dostředivého zrychlení $\vec{a}_d, \vec{a}'_d, \ldots$ v různých fázích rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici. Kolmé průměty těchto vektorů do osy y představují vektory okamžitého zrychlení $\vec{a}, \vec{a}', \ldots$ harmonického pohybu kolmého průmětu pohybu hmotného bodu do této osy.

Z **obr.1.10a** je dále patrné, že vektor $\vec{a}(t)$ okamžitého zrychlení harmonického pohybu se mění v závislosti na čase tak, že své maximální velikosti (**amplitudy** $a_m = a_d$) nabývá v bodech **maximální výchylky** oscilátoru. Při průchodu oscilátoru rovnovážnou polohou je velikost jeho zrychlení **nulová** a v tomto bodě mění vektor okamžitého zrychlení svůj **směr**.



Obr.1.10

Pro **souřadnice** $a(t)$ vektoru $\vec{a}(t)$ okamžitého zrychlení harmonického pohybu platí

$$-a_d \le a(t) \le a_d .$$

Použijeme-li vztahů $a_d = v_k^2 / r = \omega^2 r$ a $r = y_m$, můžeme **amplitudu** $a_m = a_d$ **zrychlení harmonického pohybu** vyjádřit jako

$$\boxed{a_m = \omega^2 y_m}$$

Pohybuje-li se hmotný bod po kružnici o poloměru r konstantní úhlovou rychlostí $\omega = v_k / r$, můžeme pomocí **obr.1.10b** vyjádřit časovou závislost souřadnice vektoru okamžitého zrychlení harmonického pohybu kolmého průmětu pohybu hmotného bodu do osy y ve tvaru

$$a(t) = -a_m \sin\omega t = -\omega^2 y_m \sin\omega t .$$

Znaménko mínus je v tomto výraze proto, že vektor $\vec{a}(t)$ má v těch intervalech úhlů, pro něž je funkce $\sin\omega t$ **kladná**, **zápornou** souřadnici a naopak. Tak např. pro $\omega t \in (0, \pi)$ je $\sin\omega t > 0$, ale $a(t) < 0$; pro $\omega t \in (\pi, 2\pi)$ je $\sin\omega t < 0$, ale $a(t) > 0$.

Z **obr.1.10a** je zřejmé, že vektor okamžitého zrychlení $\vec{a}(t)$ směřuje trvale do rovnovážné polohy - vektor $\vec{a}(t)$ je tedy trvale **nesouhlasně** rovnoběžný s vektorem okamžité výchylky $\vec{y}(t)$ $[\vec{a}(t) \uparrow\downarrow \vec{y}(t)]$. Je-li tedy v daném okamžiku souřadnicí vektoru $\vec{y}(t)$ číslo **kladné**, je v tomto okamžiku souřadnice vektoru $\vec{a}(t)$ **záporná** a naopak.

Časovou závislost souřadnice $a(t)$ vektoru $\vec{a}(t)$ okamžitého zrychlení harmonického pohybu můžeme proto zapsat také jako

$$\boxed{a(t) = -\omega^2 y_m \sin\omega t = \omega^2 y_m \sin(\omega t + \pi) = a_m \sin(\omega t + \pi)}$$

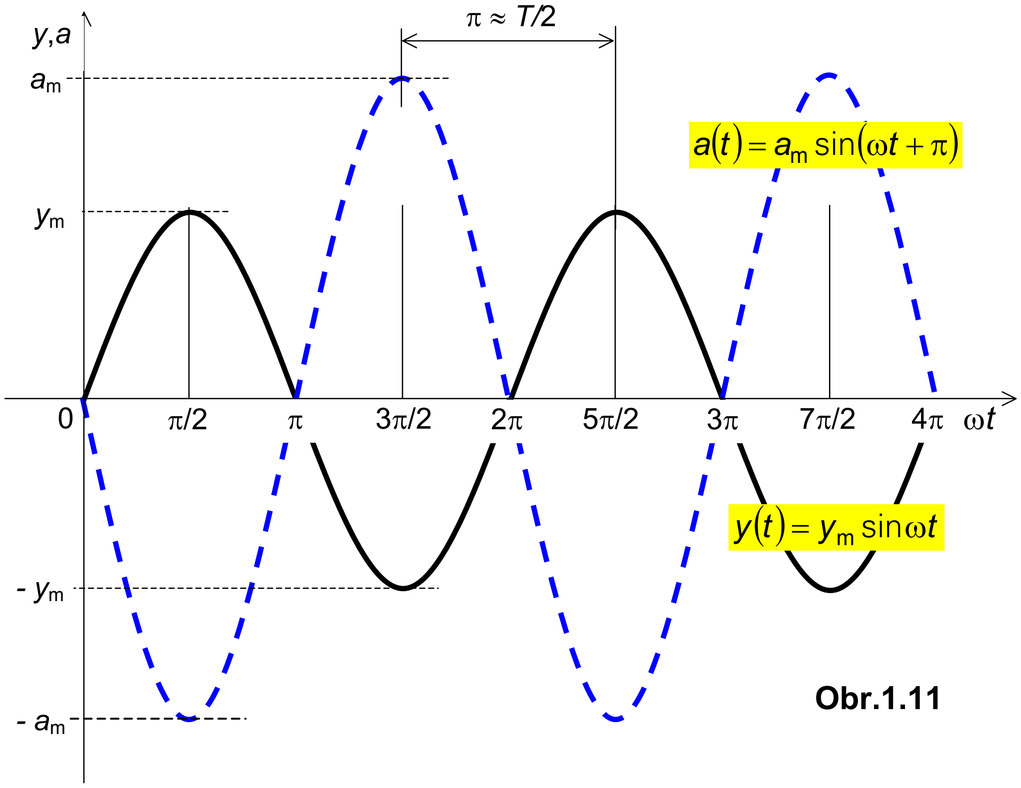
Porovnání tohoto výrazu se základní rovnicí harmonického pohybu $y(t) = y_m \sin\omega t$ umožňuje vyslovit následující tvrzení:

1. Souřadnice $a(t)$ vektoru $\vec{a}(t)$ okamžitého zrychlení harmonického pohybu je periodickou funkcí času a mění se s časem harmonicky.

2. Frekvence (a perioda) okamžitého zrychlení je stejná jako frekvence (a perioda) harmonicky kmitajícího oscilátoru.

3. Je-li ω úhlová frekvence harmonického pohybu a y_m amplituda jeho výchylky, má amplituda zrychlení tohoto pohybu hodnotu $a_m = \omega^2 y_m$.

4. Je-li harmonický pohyb popsán rovnicí $y(t) = y_m \sin\omega t$, má počáteční fáze harmonické závislosti vektoru jeho okamžitého zrychlení (vyjádřené pomocí funkce sinus), hodnotu $\varphi_v(0) = \varphi_{v0} = \pi$, takže platí $a(0) = 0$.



Obr.1.11

Porovnáme-li harmonické časové závislosti vektorů okamžité výchylky a okamžitého zrychlení harmonického pohybu (**obr.1.11**), zjistíme, že tyto závislosti jsou **fázově** posunuty o π (radiánů). Vektor $\vec{a}(t)$ okamžitého zrychlení tedy **předbíhá** harmonickou závislost vektoru $\vec{y}(t)$ okamžité výchylky o **polovinu periody**.

Vzhledem k těmto hodnotám fázového (a časového) posunutí můžeme říci, že fáze s časem se měnících vektorů okamžité výchylky a okamžité rychlosti (téhož) harmonického pohybu jsou v libovolném okamžiku navzájem **opačné**.

SHRNUTÍ KINEMATIKY HARMONICKÉHO POHYBU

Při harmonickém pohybu se hmotný bod (oscilátor) periodicky pohybuje po **úsečce**, v jejímž středu je **rovnovážná poloha** oscilátoru. Je-li tato úsečka částí osy y s počátkem v rovnovážné poloze a prochází-li oscilátor v okamžiku $t = 0$ rovnovážnou polohou v kladném směru osy y, lze harmonickou časovou závislost souřadnice vektoru $y(t)$ jeho okamžité výchylky z rovnovážné polohy vyjádřit jako

$$\boxed{y(t) = y_m \sin \omega t},$$

kde y_m je **amplituda výchylky** (maximální vzdálenost hmotného bodu od rovnovážné polohy). Skalární veličina $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ se nazývá **úhlová frekvence**, T je **perioda** a f **frekvence** harmonického pohybu. $[\omega] = s^{-1}$, $[f] = s^{-1}$, $[T] = s$.

Harmonickou časovou závislost vektoru okamžité rychlosti $\vec{v}(t)$ harmonického pohybu popsaného rovnicí $y(t) = y_m \sin\omega t$ lze zapsat jako

$$v(t) = \omega y_m \cos \omega t = \omega y_m \sin(\omega t + \pi/2),$$

kde $\omega y_m = v_m$ je **amplituda rychlosti**. Fázové posunutí této závislosti vzhledem k harmonické závislosti okamžité výchylky je rovno $\pi/2$ (radiánů), což odpovídá časovému posunutí o $T/4$. Vektor okamžité rychlosti harmonického pohybu lze proto vyjádřit pomocí vektoru okamžité výchylky tohoto pohybu jako

$$\vec{v}(t) = \omega \vec{y}\left(t + \frac{T}{4}\right).$$

Harmonickou časovou závislost vektoru okamžitého zrychlení $\vec{a}(t)$ harmonického pohybu popsaného rovnicí $y(t) = y_m \sin\omega t$ lze zapsat jako

$$a(t) = -\omega^2 y_m \sin\omega t = \omega^2 y_m \sin(\omega t + \pi),$$

kde $\omega^2 y_m = a_m$ je **amplituda zrychlení**. Fázové posunutí této závislosti vzhledem k harmonické závislosti okamžité výchylky je rovno π (radiánů), což odpovídá časovému posunutí o $T/2$. Vektor okamžitého zrychlení harmonického pohybu lze proto vyjádřit pomocí vektoru okamžité výchylky tohoto pohybu jako

$$\vec{a}(t) = \omega^2 \vec{y}\left(t + \frac{T}{2}\right) = -\omega^2 \vec{y}(t).$$

Tento zápis vyjadřuje skutečnost, že směr vektoru okamžitého zrychlení harmonického pohybu je opačný ke směru vektoru výchylky $[\vec{a}(t) \uparrow\downarrow \vec{y}(t)]$ - vektor okamžitého zrychlení harmonického pohybu tedy směřuje stále do rovnovážné polohy.

ÚLOHY

1. Harmonický oscilátor prošel rovnovážnou polohou v okamžiku $T/8$. Určete počáteční fázi jeho pohybu. $[\varphi_0 = -\pi/4\,(\text{rad})]$

2. Koncový bod jazýčku píšťaly kmitá harmonicky s amplitudou výchylky $0{,}20\ \text{mm}$ a frekvencí $440\ \text{Hz}$. Určete maximální velikost rychlosti a zrychlení jeho pohybu. $\left[v_m = 0{,}55\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}, a_m = 1{,}5\cdot 10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\right]$

3. Pružinový oscilátor koná harmonické kmity s amplitudou výchylky $12\ \text{cm}$ a za $0{,}1\ \text{s}$ po průchodu rovnovážnou polohou dosáhne výchylky $4\ \text{cm}$.

a) Vypočtěte dobu kmitu a frekvenci oscilátoru. **b)** Vypočtěte velikost rychlosti a velikost zrychlení pohybu v okamžiku $0{,}1\,\mathrm{s}$ po průchodu rovnovážnou polohou. $\left[T = 1{,}8\ \mathrm{s};\ f = 5/9\ \mathrm{Hz};\ v = 0{,}55\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\ a = 0{,}49\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\right]$

PŘÍČINA HARMONICKÉHO POHYBU - ELASTICKÁ SÍLA

Harmonický pohyb je pohybem **nerovnoměrným** - harmonicky kmitající oscilátor se pohybuje se **zrychlením**, jehož příčinou je **síla**, která na oscilátor během pohybu působí.

Vrátíme-li se k pokusu s kmitavým pohybem kovové kuličky zavěšené na pružině, znázorněnému na **obr.1.1**, zjistíme, že na kuličku během jejího pohybu působí kromě konstantní tíhové síly i proměnná **síla pružnosti** $\vec{F}_{\mathrm{p}}(t)$, vznikající **deformací** pružiny při jejím periodickém natahování a stlačování. Charakter deformace pružiny (natažení nebo stlačení) i změnu její délky, k níž při deformaci dochází, můžeme popsat směrem a velikostí vektoru $\vec{y}(t)$ okamžité výchylky těžiště kuličky z rovnovážné polohy.

Silou pružnosti se pružina "brání" svému periodickému natahování a stlačování - směr této síly je tedy vždy opačný ke směru vektoru okamžité výchylky. Velikost síly pružnosti je při **pružné** deformaci pružiny podle **HOOKOVA** zákona **přímo úměrná** hodnotě jejího prodloužení nebo zkrácení.

Na kuličku, zavěšenou na konci pružiny, působí během jejího kmitavého pohybu časově **proměnná** síla,

- jejíž velikost je v každém okamžiku tohoto pohybu přímo úměrná velikosti vektoru okamžité výchylky,

- která směřuje stále do rovnovážné polohy a má proto opačný směr než vektor okamžité výchylky.

Ukážeme nyní, že právě síla těchto vlastností je příčinou harmonického pohybu a tím také dokážeme, že kmitavý pohyb pružinového oscilátoru je při pružné deformaci pružiny pohybem harmonickým.

Zvolíme-li soustavu souřadnic obvyklým způsobem (počátek je v rovnovážné poloze harmonického pohybu probíhajícího v ose y), je podle předchozího článku souvislost mezi vektorem okamžité výchylky $\vec{y}(t)$ a vektorem okamžitého zrychlení $\vec{a}(t)$ harmonického pohybu s úhlovou frekvencí ω dána vztahem

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{y}(t).$$

Má-li oscilátor (kulička zavěšená na konci pružiny) hmotnost m, je podle druhého Newtonova zákona příčinou zrychlení pohybu síla $\vec{F}(t)$, pro níž platí

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t) = -m\omega^2 \vec{y}(t).$$

Hmotnost m oscilátoru a úhlová frekvence ω jeho harmonického pohybu jsou konstantní a proto je konstantní (a kladný) i jejich součin $k = m\omega^2$. Vzhledem k tomu můžeme předchozí výraz psát ve tvaru

$$\boxed{\vec{F}(t) = -k\,\vec{y}(t);\ k > 0}$$

Tento vztah vyjadřuje následující vlastnosti síly, způsobující harmonický pohyb oscilátoru:

1. Vektor proměnné síly $\vec{F}(t)$ je v každém okamžiku **nesouhlasně** rovnoběžný s vektorem okamžité výchylky $\vec{y}(t)$ - vektor síly $\vec{F}(t)$ míří - stejně jako vektor zrychlení $\vec{a}(t)$, jehož je tato síla příčinou - **trvale do rovnovážné polohy** oscilátoru.

2. Velikost vektoru síly je **přímo úměrná** velikosti vektoru okamžité výchylky $\left|\vec{F}(t)\right| = k\left|\vec{y}(t)\right|$.

Síla způsobující harmonický pohyb má tedy vlastnosti shodné s vlastnostmi síly **pružnosti** při pružné deformaci a proto tuto sílu nazýváme - i když je její původ jakýkoliv – **pružná** nebo také **elastická síla**.

Kmitavý pohyb kuličky zavěšené na konci pružiny - **pružinového oscilátoru** - je pohybem **harmonickým**, protože je vyvolán působením elastické síly. V dalším výkladu uvidíme, že harmonicky kmitat může nejen pružinový oscilátor, ale také např. kyvadlo, těleso plovoucí v kapalině nebo také kapalina v trubici ve tvaru písmene U.

Je-li harmonický pohyb oscilátoru popsán rovnicí $y = y_m \sin\omega t$, můžeme časovou závislost vektoru elastické síly $\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t)$ vyjádřit pomocí časové závislosti vektoru okamžitého zrychlení harmonického pohybu $a(t) = \omega^2 y_m \sin(\omega t + \pi)$ jako $F(t) = m\,\omega^2 y_m \sin(\omega t + \pi) = F_m \sin(\omega t + \pi)$.

Elastická síla se tedy s časem mění **harmonicky** se stejnou periodou $T = 2\pi/\omega$ a úhlovou frekvencí ω, jakou má harmonický pohyb, který působení této síly vyvolalo.

Harmonické časové závislosti elastické síly a okamžitého zrychlení harmonického pohybu mají **tutéž fázi** $(\Delta\varphi = 0)$; časové závislosti elastické síly a okamžité výchylky jsou ve fázi **opačné** ($\Delta\varphi = \pi$, $\Delta t = T/2$).

Oscilátorem může být každé těleso schopné pohybu (hmotný bod, molekula, atom, iont, částice apod.), které se nachází v silovém poli v rovnovážné poloze stálé a má tedy v této poloze **minimum** potenciální energie. Proto při vychýlení působí pole na těleso silou, která se jej "snaží" vrátit do rovnovážné polohy. Po uvolnění uvede proto síla vychýlené těleso do **zrychleného** pohybu směrem k jeho (původní) rovnovážné poloze. V důsledku nabyté hybnosti pokračuje těleso setrvačností ve svém pohybu i po dosažení rovnovážné polohy, v níž je silové působení na těleso nulové.

Jeho další pohyb, při němž se vzdaluje od své rovnovážné polohy, je **zpomalený**, neboť je opět vystaveno působení síly pole, "usilující" o jeho návrat do rovnovážné polohy.

V jistém okamžiku (a v jisté maximální vzdálenosti od této polohy - **amplitudě** jeho výchylky) se tedy těleso zastaví a jeho pohyb směrem k rovnovážné poloze se začne opakovat v opačném směru - těleso koná kolem své (stálé) rovnovážné polohy **periodický kmitavý** pohyb.

Síla, způsobující kmitavý pohyb, směřuje v každém okamžiku tohoto pohybu do rovnovážné polohy tělesa (oscilátoru). Je-li navíc velikost této síly přímo úměrná velikosti okamžité výchylky - je-li tedy tato síla silou **elastickou**, je kmitání oscilátoru **harmonické**.

Vlastnosti elastické síly, vyjádřené vektorovou rovnicí $\vec{F}(t) = -k\,\vec{y}(t);\ k > 0$, splňují kromě síly pružnosti také další síly. Vlastnosti elastické síly má např. složka tíhové síly, působící při malých výchylkách na kyvadlo, kterým může být každé (tuhé) těleso, otáčivé kolem (vodorovné) osy neprocházející jeho těžištěm, nebo zavěšené na dostatečně pevném vlákně, jehož druhý konec je upevněn.

Příčinou harmonického kmitání atomů v krystalické mřížce kovů je síla, která je výslednicí přitažlivých a odpudivých sil jejich vzájemného působení se sousedními atomy. V iontových krystalech jsou těmito silami síly elektrostatické. Proto pro zjednodušení používáme název elastická síla pro všechny síly splňující podmínku $\vec{F}(t) = -k\,\vec{y}(t)$ a vyvolávající harmonický pohyb.

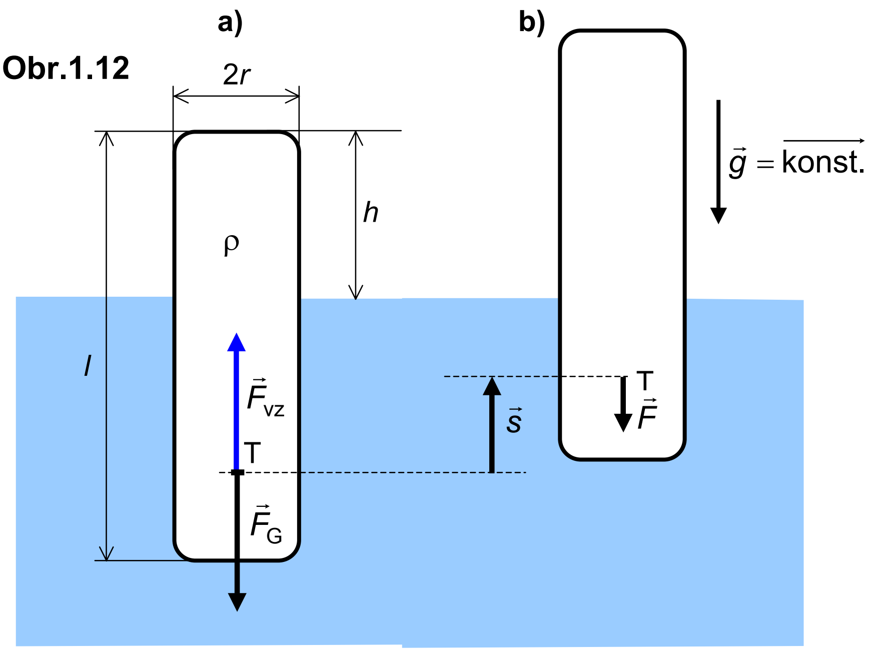
PŘÍKLAD

Dutý uzavřený skleněný váleček, jehož jeden konec je hmotnější než druhý, plove na hladině klidné kapaliny tak, že je částečně ponořen a jeho podélná osa je k hladině kolmá. Dokažte, že pohyb válečku po porušení rovnováhy mezi tíhovou a vztlakovou silou na něj působící je pohybem harmonickým. Váleček má poloměr r, délku l a hmotnost m. Hustota kapaliny je ρ_k.

ŘEŠENÍ

Dané veličiny: Váleček: m, l, r, ρ_v - průměrná hustota látky, ze které je váleček vyroben; $\rho_v = m/V = m/\left(\pi r^2 l\right)$. Kapalina: hustota ρ_k. Nutná podmínka pro situaci uvedenou v zadání: $\rho_v < \rho_k$.

Obr.1.12



Úkol: Pro splnění úkolu stačí dokázat, že výslednice tíhové a vztlakové síly působící na váleček při porušení rovnovážném stavu má vlastnosti **elastické** síly.

Na **obr.1.12a** je váleček v klidu (jde o rovnovážnou polohu **stálou** v homogenním tíhovém poli), neboť výslednice tíhové a hydrostatické vztlakové síly je nulová $\left(\vec{F}_{\mathrm{G}} = -\vec{F}_{\mathrm{VZ}}\right)$.

$$F_{\mathrm{G}} = F_{\mathrm{VZ}} \Rightarrow \pi r^2 l \rho_v g = \pi r^2 (l-h) \rho_k g \Rightarrow$$

$$\pi r^2 l \rho_v = \pi r^2 (l-h) \rho_k .$$

Obr.1.12b znázorňuje porušení rovnovážného stavu povytažením válečku z kapaliny. Vynořená část válečku má délku $h+s<l$ $\left(s = |\vec{s}|\right)$. Vztlaková síla má v tomto případě menší velikost než tíhová síla a jejich výslednice $\vec{F}$ míří do kapaliny.

$$\vec{s} \uparrow\downarrow \vec{g}\,;\; F_{VZ} < F_G ; F = F_G - F_{VZ}\,;\; \vec{F} \uparrow\uparrow \vec{g}\,.$$

$$F_{VZ} = F_{VZ} - \pi r^2 s \rho_k g\,;\; F_G = F_{VZ} \Rightarrow F = \pi r^2 s \rho_k g\,.$$

$$\pi r^2 \rho_k g = k \Rightarrow F = ks\,;\; k > 0\,;\; \vec{F} \uparrow\downarrow \vec{s} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F} = -k\vec{s}}$$

V případě, že bychom rovnovážný stav **porušili** větším ponořením válečku do kapaliny, obdrželi bychom stejným postupem pro vektor "ponoření" $\vec{s}\,' \uparrow\uparrow \vec{g}$ a pro výslednici vztlakové a tíhové síly $\vec{F}' \uparrow\downarrow \vec{g}$ opět vztah $\vec{F} = -k\vec{s}$.

Síla působící na váleček při porušení jeho stálé rovnovážné polohy je tedy **elastická** a vyvolává jeho **harmonický** pohyb.

VOLNÉ NETLUMENÉ KMITY HARMONICKÉHO OSCILÁTORU

Kdyby na kmitající oscilátor působila pouze elastická síla (např. síla pružnosti v případě pružinového oscilátoru, napjaté struny, na jednom konci upevněné ocelové tyče nebo složka tíhové síly v případě kyvadla), trval by po počátečním rozkmitání jeho (harmonický) kmitavý pohyb s konstantní amplitudou výchylky i periodou neomezeně dlouhou dobu. Kmitavému pohybu takového dynamicky izolovaného oscilátoru říkáme volné netlumené (harmonické) kmitání.

Praktická zkušenost i výsledky pokusů však ukazují, že rozkmitáme-li některý z uvedených mechanických oscilátorů, dochází k postupnému zmenšování amplitudy jeho výchylky, takže po určité době se každý z těchto oscilátorů zastaví ve své rovnovážné poloze.

Příčinou tohoto "utlumení" kmitavého pohybu skutečných, dynamicky neizolovaných oscilátorů je působení síly, která odporuje jejich pohybu, zejména síly odporu prostředí v němž se oscilátor nachází, třecí síly apod. Tomuto silovému působení říkáme **tlumení** oscilátoru. Kmitavý pohyb **skutečných** oscilátorů je tedy vždy tlumený.

V řadě praktických úloh - kmitá-li např.oscilátor ve vzduchu a je-li frekvence jeho kmitání malá - však můžeme tlumení způsobené silou odporu prostředí zanedbat a považovat kmitavý pohyb oscilátoru v dostatečně dlouhém časovém intervalu za netlumený. Tlumení oscilátoru lze také podstatně zmenšit - téměř netlumeně kmitá např. kyvadlo v uzavřeném prostoru, z něhož byl evakuován vzduch.

Základní veličinou charakterizující určitý harmonický oscilátor je jeho **vlastní frekvence** f_0 (nebo **vlastní úhlová frekvence** $\omega_0 = 2\pi f_0$), která je rovna frekvenci jeho **volných netlumených harmonických kmitů**. Tuto frekvenci by tedy měl harmonický pohyb daného oscilátoru, pokud by byl dokonale dynamicky izolován a působila na něj **pouze elastická síla**.

Vlastní frekvenci f_0 daného oscilátoru můžeme určit z hodnoty kladné konstanty k ve vyjádření elastické síly $\vec{F} = -k\vec{y}(t)$.

Z matematického hlediska je k součinitelem přímé úměrnosti $F = ky$ mezi okamžitými velikostmi vektorů elastické síly a výchylky oscilátoru.

Z fyzikálního hlediska je k veličinou, nazývanou **tuhost oscilátoru**. Tato skalární veličina, **specifická** pro každý oscilátor, je definovaná vztahem

$$\boxed{k = \frac{F}{y}}\ ;\ \left(F = \left|\vec{F}\right|,\ y = \left|\vec{y}\right|\right)\ ;\ [k] = \mathrm{N \cdot m^{-1}}.$$

Z definičního vztahu je patrné, že čím větší je tuhost oscilátoru, tím větší je při téže velikosti jeho okamžité výchylky velikost elastické síly.

Tuhost pružiny - základní části pružinového oscilátoru - lze určit např. z prodloužení pružiny Δl, způsobeného tíhou $G = mg$ závaží, zavěšeného na jejím konci. Hmotnost m závaží přitom volíme tak, aby deformace pružiny byla **pružná**.

V rovnovážném stavu je velikost síly pružnosti deformované pružiny rovna velikosti tíhy závaží - na závaží, jehož tíha vyvolá prodloužení pružiny l, působí elastická síla o velikosti $F_p = G = mg$. Změříme-li prodloužení pružiny a známe-li hmotnost závaží, můžeme tuhost k použité pružiny určit ze vztahu

$$k = \frac{F_p}{\Delta l} = \frac{mg}{\Delta l}.$$

Číselně je tedy tuhost pružiny rovna velikosti síly, která by - pokud by to bylo technicky možné a pokud by deformace byla pružná - vyvolala ve směru svého působení prodloužení (nebo zkrácení) pružiny o $1\,\mathrm{m}$. Ze zkušenosti víme, že se tuhosti různých v praxi používaných pružin a pružinek navzájem liší - např. pružina, použitá v tlumiči těžkého nákladního automobilu má podstatně větší tuhost, než pružina v tomtéž zařízení u motocyklu.

Tuhost pružinového oscilátoru je dána tuhostí pružiny, která je jeho nutnou součástí ("zajišťuje" k harmonickému kmitání nezbytnou elastickou sílu). Vlastní frekvence tohoto oscilátoru však závisí nejen na tuhosti pružiny k, ale také na hmotnosti m oscilátoru - tělesa, které je na pružině zavěšeno nebo s ní jinak spojeno. Připomeňme, že v námi použitém nejjednodušším modelu pružinového oscilátoru hmotnost pružiny vůči hmotnosti tohoto tělesa zanedbáváme.

Vyjádříme-li elastickou sílu pomocí zrychlení (netlumeného) harmonického pohybu, jehož je tato síla příčinou, dostáváme

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t) = -m\omega_0^2\,\vec{y}(t).$$

Ze srovnání tohoto vztahu se základním vyjádřením elastické síly

$$\vec{F}(t) = -k\vec{y}(t);\ k > 0$$

plyne, že souvislost tuhosti oscilátoru a jeho vlastní úhlové frekvence ω_0 lze vyjádřit jako

$$k = m\omega_0^2\ ;\ [k] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{m}^{-1} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}.$$

Vlastní úhlová frekvence pružinového oscilátoru o tuhosti k je pak

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Pro vlastní frekvenci f_0 a (vlastní) periodu T_0 daného oscilátoru platí

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}\ .$$

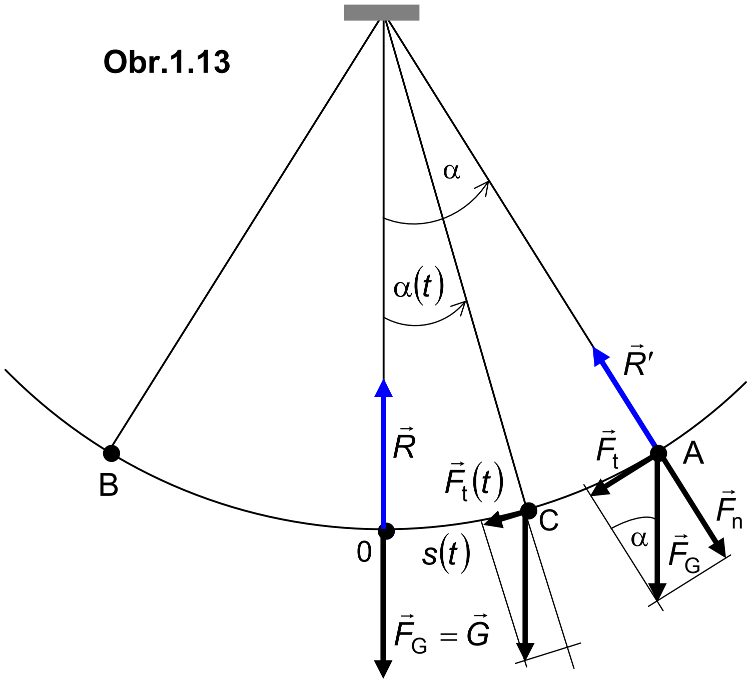
Vlastní frekvence různě hmotných pružinových oscilátorů téže tuhosti jsou různé. Hmotnější oscilátory kmitají s menší frekvencí (pohybují se "lenivěji"), neboť tatáž elastická síla překonává větší setrvačnost při jejich pohybu.

Vlastní frekvence nezávisí na amplitudě výchylky oscilátoru. Uvolníme-li tedy za jinak stejných podmínek tentýž oscilátor při různých výchylkách (splňujících podmínku pružné deformace pružiny nebo jiné omezení) z jeho rovnovážné polohy, kmitá (netlumeně) vždy se stejnou frekvencí .

Všimněme si nyní jiného jednoduchého mechanického oscilátoru, kterým je tzv. **matematické kyvadlo** (**obr.1.13**). Tento oscilátor modelujeme např. kovovou kuličkou (považovanou za hmotný bod), zavěšenou na dostatečně pevné niti konstantní délky l. Hmotnost niti vůči hmotnosti m kuličky opět zanedbáváme.

Ukážeme, že pohyb matematického kyvadla může být při velmi malé amplitudě jeho výchylky pohybem harmonickým.

Obr.1.13



V homogenním tíhovém poli $\left(\vec{g} = \overrightarrow{\text{konst.}}\right)$ působí na kuličku ve stálé rovnovážné poloze (0) tíhová síla $\vec{F}_\mathrm{G}$ a reakce závěsu (niti) $\vec{R}$ na tíhu kuličky $\vec{G}$. Výslednice těchto sil je nulová $(R = G = F_\mathrm{G} = mg)$ a kulička je v klidu.

Vychýlíme-li kuličku z její stálé polohy do bodu A, je reakce závěsu $\vec{R}'$ opačná k akci, kterou je tentokrát pouze normálová složka tíhy $\vec{G}_\mathrm{n} = \vec{F}_\mathrm{n}$. Výslednice sil $\vec{R}'$ a $\vec{F}_\mathrm{G}$ působících na kuličku je proto totožná s tečnou složkou tíhové síly $\vec{F}_\mathrm{t}$.

Uvolníme-li vychýlenou kuličku, vrací ji síla $\vec{F}_\mathrm{t}$ z bodu A zpět do rovnovážné polohy. Tatáž situace se opakuje v bodě B, do něhož se uvolněná kuličky díky setrvačnosti vychýlí. Po svém vychýlení do bodu A a uvolnění začne tedy kulička (matematické kyvadlo) konat periodický pohyb po oblouku AB.

Z **obr.1.13** je patrné, že během tohoto pohybu se tečná složka tíhové síly, působící na kuličku, periodicky mění. Vyjádříme-li okamžitou výchylku kyvadla úhlem $\alpha(t)$, měřeným od svislice procházející rovnovážnou polohou, můžeme velikost síly $\vec{F}_\mathrm{t}(t)$, vyvolávající periodický pohyb kyvadla, zapsat jako

$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{G} \sin\alpha(t) = mg \sin\alpha(t).$$

Omezíme-li úhlovou výchylku kyvadla amplitudou $\alpha_m \approx 4° = \pi/45$ (radiánů), a vyjádříme-li úhel $\alpha(t)$ v obloukové míře jako $\alpha(t) = s(t)/l$ (radiánů), můžeme položit $\sin\alpha(t) = \alpha(t) = s(t)/l$. Okamžitá velikost tečné složky tíhové síly je pak

$$F_t(t) = mg\sin\alpha(t) = mg\alpha(t) = \frac{mg}{l}s(t) = ks(t).$$

Při tomto omezení amplitudy výchylky můžeme oblouk OC nahradit orientovanou úsečkou - vektorem okamžité výchylky kyvadla $\vec{s}(t)$. Z **obr.1.13** je patrné, že směry vektorů $\vec{s}(t)$ a $\vec{F}_t(t)$ jsou v každém okamžiku pohybu kyvadla **opačné**. Můžeme tedy psát

$$\boxed{\vec{F}_t(t) = -k\vec{s}(t);\ k = \frac{mg}{l} > 0}$$

Tečná složka $\vec{F}_t(t)$ tíhové síly působící na kuličku (matematické kyvadlo), má tedy při omezení amplitudy jeho výchylky $\alpha_m \approx 4° = \pi/45$ (radiánů) vlastnosti **elastické** síly - matematické kyvadlo při tomto omezení amplitudy výchylky koná harmonický pohyb, který můžeme popsat rovnicí

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_m \sin\omega t\,.$$

Tuhost matematického kyvadla

$$\boxed{k = \frac{mg}{l};\ [k] = \mathrm{N\cdot m^{-1}}}$$

závisí na jeho hmotnosti m a délce závěsu l.

Vlastní úhlovou frekvenci ω_0 (**netlumeného**) harmonického pohybu tohoto oscilátoru určíme opět srovnáním vztahů

$$\vec{F}_t(t) = \frac{mg}{l}\vec{s}(t) \ \text{ a } \ \vec{F}_t(t) = m\vec{a}(t) = -m\omega_0^2\vec{s}(t)\ ,$$

z něhož dostaneme

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Vlastní frekvence f_0 a perioda T_0 matematického kyvadla je tedy

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\ ;\ \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Vlastní frekvence matematického kyvadla - na rozdíl od pružinového oscilátoru - nezávisí na jeho hmotnosti a klesá s délkou jeho závěsu l. Další odlišností obou oscilátorů je i to, že matematické kyvadlo může "kývat" (harmonicky kmitat) pouze v tíhovém poli $(g > 0)$.

Perioda, neboli doba kmitu matematického kyvadla T, je (konstantní) časový interval, během něhož kyvadlo vykoná jeden **kmit** - např. pohyb z jednoho bodu obratu do druhého a zpět. Za polovinu periody vykoná kyvadlo polovinu kmitu, neboli jeden **kyv** - např. pohyb z jednoho bodu obratu do druhého. Časovému intervalu $\tau = T/2$ říkáme proto **doba kyvu** matematického kyvadla.

Matematické kyvadlo můžeme použít k měření času (na rozdíl od pružinového oscilátoru však pouze v tíhovém poli), nebo k určení velikosti tíhového zrychlení.

Obdobný charakter pohybu jako matematické kyvadlo má i kyvadlo **fyzické**, kterým může být každé (tuhé) těleso otáčivé kolem (vodorovné) osy neprocházející jeho těžištěm. Vlastní frekvence fyzického kyvadla závisí na vzdálenosti jeho těžiště od osy otáčení a na jeho momentu setrvačnosti vzhledem k této ose.

Fyzické kyvadlo používáme již velmi dlouho jako **regulátor** chodu (kyvadlových) hodin; masivní fyzická kyvadla jsou součástmi **seismografů** - přístrojů registrujících pohyby zemské kůry např. při zemětřeseních nebo pokusných nukleárních výbuších.

SHRNUTÍ

Je-li oscilátor po počátečním (vnější silou způsobeném) vychýlení z rovnovážné polohy a následném uvolnění ponechán "sám sobě", koná volný kmitavý pohyb. Můžeme-li zanedbat síly odporující jeho pohybu, považujeme toto kmitání **netlumené**. Je-li toto volné netlumené kmitání **harmonické**, probíhá s **vlastní úhlovou frekvencí** ω_0, určenou vztahem

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

v němž k je **tuhost** a m hmotnost oscilátoru.

PŘÍKLADY

Kladka zanedbatelné hmotnosti je zavěšena na dvou stejně dlouhých pružinách o tuhostech k_1, k_2 (**obr.1.14a**). Zavěšením závaží o hmotnosti m na tuto kladku se její střed posune o délku y_0 (**obr.1.14b**). Vypočtěte (vlastní) periodu oscilátoru tvořeného oběma pružinami a závažím.

ŘEŠENÍ

Dané veličiny: m, k_1, k_2, y_0 ; **Úkol:** výpočet T_0

Při rovnovážném stavu po zavěšení závaží platí pro prodloužení obou pružin a posunutí středu kladky vztahy

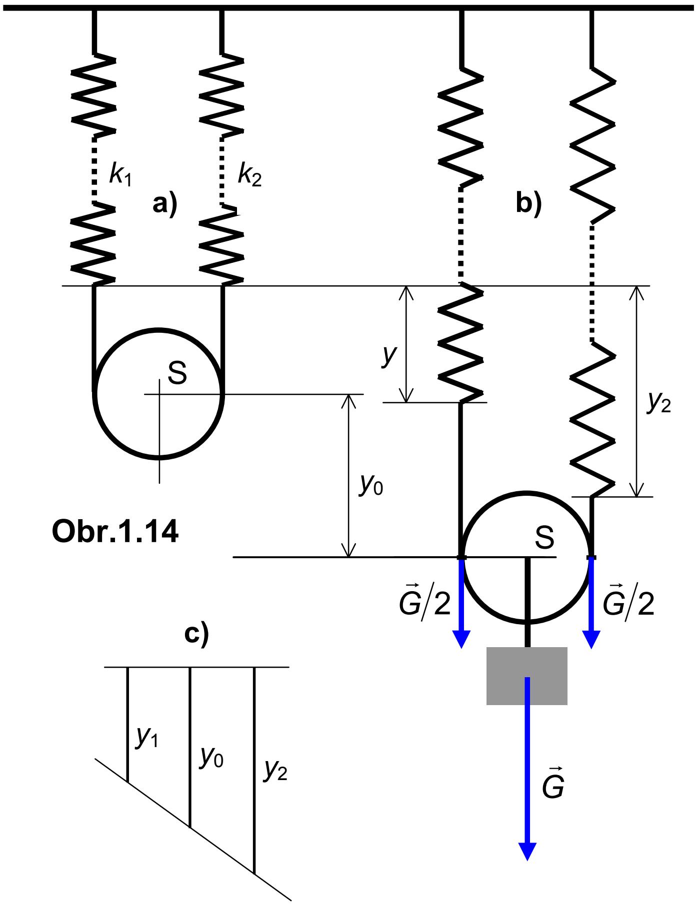
$$k_1 y_1 = k_2 y_2 = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2}$$

a odtud pro prodloužení pružin dostáváme

$$y_1 = \frac{mg}{2k_1}; \; y_2 = \frac{mg}{2k_2}.$$

Z **obr.1.14c** je zřejmé, že úsečka o délce y_0 je střední příčkou rovnoběžníka, jehož základny mají délku y_1, y_2, takže platí

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{mg(k_1 + k_2)}{4k_1k_2}.$$



Obr.1.14

Výsledná tuhost oscilátoru musí splňovat podmínku

$$ky_0 = G = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{y_0} = \frac{4k_1k_2}{k_1 + k_2}.$$

Všimněme si, že **výsledná** tuhost oscilátoru není prostým (algebraickým) součtem tuhostí obou pružin.

Pro periodu (vlastních) kmitů oscilátoru dostáváme

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{m\frac{(k_1 + k_2)}{k_1k_2}}}$$

Zkouška správnosti jednotek

$$[T_0] = \sqrt{\mathrm{kg}\frac{\mathrm{N\cdot m^{-1}}}{(\mathrm{N\cdot m^{-1}})^2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}\cdot m^{-1}}}} = \mathrm{s}.$$

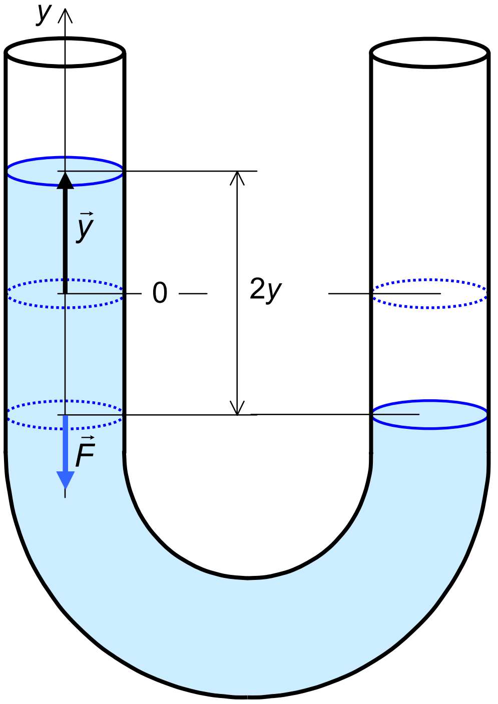
Skleněná trubice ve tvaru písmene U je naplněna kapalinou tak, že celková délka kapalinového sloupce je l (**obr.1.15**). Nakloněním trubice a jejím vrácením do původní polohy se sloupec kapaliny rozkmitá. Určete vlastní frekvenci jeho pohybu. Tlumení zanedbáváme.

ŘEŠENÍ

Dané veličiny: l, hustota kapaliny ρ, plošný obsah příčného průřezu trubice S.

Úkol: výpočet f_0

Obr.1.15



Označíme-li jako S plošný obsah příčného průřezu trubice, je hmotnost kapaliny v trubici rovna $m = Sl\rho$. Je-li rozdíl hladin kapaliny v trubici $2y$ a $\vec{y}$ je vektor výchylky hladiny v levém rameni trubice, působí v úrovni vyšrafovaného příčného průřezu trubice na kapalinu hydrostatická tlaková síla $\vec{F}$ o velikosti $F = 2Sy\rho g$, která je nesouhlasně rovnoběžná s vektorem $\vec{y}$. Pro vektory $\vec{F}$ a $\vec{y}$ tedy platí:

$$\vec{F} = -2S\rho g\vec{y}\,;\; 2S\rho g = k > 0 \Rightarrow \vec{F} = -k\vec{y}\,.$$

Tato síla je tedy elastická a způsobí proto harmonické kmitání kapalinového sloupce. Při výpočtu vlastní frekvence zanedbáváme tlumení a platí

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}\,;\; \omega_0^2 = \frac{k}{m}\,;\; k = 2S\rho g\,;\; m = Sl\rho \Rightarrow$$

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{2l}}}$$

Vlastní frekvence kmitání kapalinového sloupce tedy nezávisí na druhu kapaliny a na plošném obsahu průřezu trubice.

ÚLOHY

1. Pružina byla zatížena tělesem o hmotnosti 0,50 kg a prodloužila se tím o 4,0 cm. Určete frekvenci a periodu pohybu tělesa po porušení jeho rovnovážného stavu. Hmotnost pružiny zanedbáváme. $[T = 0{,}4\text{ s}; f = 2{,}5\text{ Hz}]$

2. Břemeno zavěšené na rameni stavebního jeřábu bylo nárazem větru uvedeno do kmitavého pohybu. Určete periodu tohoto pohybu, je-li délka závěsného lana $28{,}0\ \mathrm{m}$ a považujeme-li oscilátor za matematické kyvadlo. $[T = 10{,}6\ \mathrm{s}]$

3. Matematické kyvadlo má hmotnost $1{,}0\ \mathrm{kg}$, délku $1{,}0\ \mathrm{m}$ a je vychýleno z rovnovážné polohy o úhel 10°. Určete přírůstek jeho potenciální energie při tomto vychýlení, rychlost při průchodu rovnovážnou polohou a maximální zrychlení pohybu kyvadla, který považujeme i při této úhlové amplitudě výchylky za harmonický. $[\Delta E_\mathrm{p} = 0{,}15\ \mathrm{J};\ v = 0{,}55\ \mathrm{m\cdot s^{-1}};\ a_\mathrm{m} = 1{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}]$

4. Jak se změní frekvence matematického kyvadla zdvojnásobíme-li jeho délku? $[f' = f\sqrt{2}/2]$

5. Dvě matematická kyvadla různých délek mají doby kmitu v poměru $19:20$. První kyvadlo vykoná za časový interval $30\ \mathrm{s}$ o 3 kmity víc než druhé. Určete frekvence a periody obou kyvadel. $[T_1 = 0{,}5\ \mathrm{s};\ f_1 = 2\ \mathrm{Hz};\ T_2 = 10/19\ \mathrm{s};\ f_2 = 1{,}9\ \mathrm{Hz}]$

6. Jedním z významných pokusů dokazujících rotaci Země byl **FOUCAULTŮV** pokus (1851) s matematickým kyvadlem o délce $67{,}0\ \mathrm{m}$. Určete dobu kmitu tohoto kyvadla. $[T = 16{,}4\ \mathrm{s}]$

7. Matematické kyvadlo, jehož doba kyvu je $1\ \mathrm{s}$, nazýváme sekundové. Určete jeho délku při normálním tíhovém zrychlení $g_\mathrm{n} = 9{,}80665\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jaké by bylo zpoždění hodin řízených tímto kyvadlem za $24\ \mathrm{h}$ na rovníku (velikost tíhového zrychlení na rovníku je přibližně $9{,}78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$)? $[134\ \mathrm{s}]$

8. Zkrátíme-li matematické kyvadlo o $1/5$ jeho délky, zvětší se jeho frekvence o $1/5\ \mathrm{Hz}$. Když je naopak o tuto část jeho původní délky prodloužíme, jeho frekvence se o $1/5\ \mathrm{Hz}$ zmenší. Určete (původní) délku tohoto kyvadla. $[6{,}7\ \mathrm{m}]$

MECHANICKÁ ENERGIE VOLNĚ KMITAJÍCÍHO OSCILÁTORU

Začne-li po vychýlení z rovnovážné polohy a uvolnění těleso volně a **netlumeně** harmonicky kmitat s nulovou počáteční fází, má při okamžité výchylce $y(t) = y_m \sin \omega t$ rychlost $v(t) = y_m \cos \omega t$.

Kmitající těleso (oscilátor) má v tomto okamžiku **kinetickou energii**

$$\boxed{E_k(t) = \frac{1}{2} m [v(t)]^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 y_m^2 \cos^2 \omega t}$$

Kinetická energie volně a netlumeně kmitajícího harmonického oscilátoru se během jeho pohybu **periodicky** (a **neharmonicky**) mění tak, že své **maximální** hodnoty

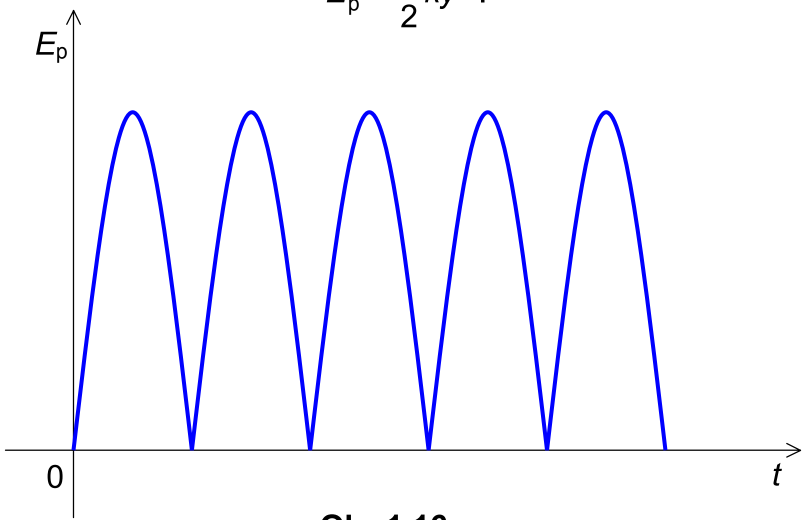
$$E_{k,max} = \frac{1}{2} m \omega^2 y_m^2 = \frac{1}{2} k y_m^2$$

nabývá při průchodu oscilátoru rovnovážnou polohou. Při maximálních výchylkách oscilátoru je jeho kinetická energie nulová.

V rovnovážné poloze stálé je **potenciální energie** tělesa minimální. V případě mechanických oscilátorů se jedná o minimum potenciální energie **pružnosti** nebo potenciální energie **tíhové**. Svého maxima potenciální energie nabývá při maximálních výchylkách - v největší vzdálenosti od rovnovážné polohy.

Z mechaniky víme, že pružina o **tuhosti** k má při **pružné** deformaci, spočívající v jejím prodloužení nebo zkrácení o délku y, potenciální energii pružnosti

$$E_p = \frac{1}{2} k y^2 .$$



Obr.1.16

Okamžitá výchylka (změna délky pružiny) se s časem mění a proto pro okamžitou hodnotu potenciální energie pružnosti harmonicky kmitajícího pružinového oscilátoru platí

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k [y(t)]^2 = \frac{1}{2} k y_m^2 \sin^2 \omega t .$$

Časový průběh této závislosti (**obr.1.16**) je tedy **periodický** ale není **harmonický** $\left[E_p(t) \approx \sin^2 \omega t\right]$.

Sečteme-li kinetickou a potenciální energii oscilátoru v libovolném okamžiku jeho pohybu, dostaneme:

$$E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} k\, y_m^2 \left(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t\right) = \frac{1}{2} k\, y_m^2 .$$

Při netlumeném volném kmitání platí **zákon zachování mechanické energie** - během tohoto pohybu se kinetická a potenciální energie periodicky mění jedna v druhou tak, že jejich součet (mechanická energie oscilátoru) je konstantní.

Mechanická energie **volně** kmitajícího **netlumeného** harmonického oscilátoru o tuhosti k a amplitudě výchylky y_m je tedy konstantní a platí:

$$\boxed{E = E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} k\, y_m^2 = \text{konst.}}$$

ÚLOHY

1. Určete energii kmitajícího závaží upevněného na pružině, která se působením síly o velikosti $20\,\text{N}$ prodlouží o $1\,\text{cm}$. Amplituda výchylky pohybu je $8\,\text{cm}$. $[6\ \text{J}]$

2. Pružina, jejíž hmotnost můžeme zanedbat, by se při zatížení závažím o hmotnosti $20\ \text{g}$ prodloužila o $4\ \text{cm}$. Jaké závaží je nutno na pružinu upevnit, aby při kmitání s amplitudou výchylky $15\,\text{cm}$ procházelo rovnovážnou polohou rychlostí o velikosti $1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$? Jaká je energie tohoto oscilátoru? $\left[110\ \text{g}; 5{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{J}\right]$

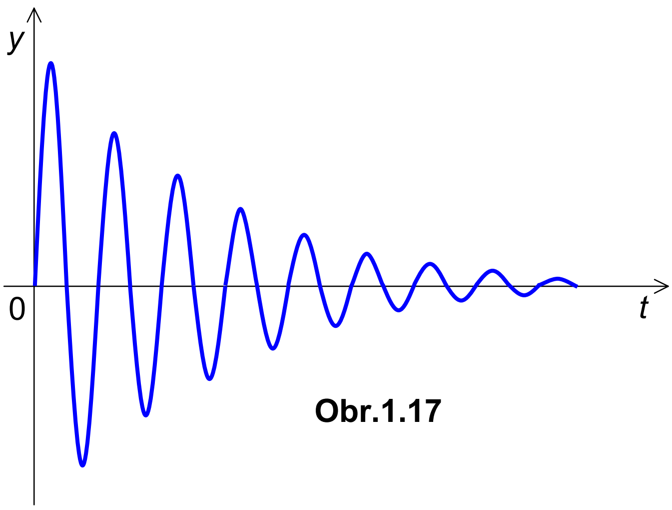
TLUMENÉ A NUCENÉ KMITÁNÍ OSCILÁTORU. REZONANCE

Netlumený kmitavý pohyb je v praxi neuskutečnitelný, neboť na oscilátor vždy působí síly, které odporují jeho pohybu. Jde především o působení **třecí síly** a **síly odporu prostředí**. Na odporu proti kmitání pružinového oscilátoru se však podílejí také síly související se změnami mikrostruktury látky, z níž je vyrobena opakovaně se deformující pružina. Všechny tyto pohybu odporující síly způsobují **tlumení** oscilátoru.

Volný kmitavý pohyb skutečných oscilátorů je proto vždy pohybem tlumeným.

Mechanická energie volně kmitajícího oscilátoru se následkem tlumení **zmenšuje**, neboť při každém kmitu se při překonávání tlumících sil její část mění ve vnitřní energii oscilátoru i látkového prostředí, v němž se oscilátor pohybuje.

Tento postupný úbytek mechanické energie volně kmitajícího tlumeného oscilátoru se projevuje průběžným **zmenšováním** amplitudy jeho výchylky y_m (**obr.1.17**), neboť tuhost k oscilátoru **nezávisí na tlumení a zůstává konstantní**. Po určité době svého pohybu se proto každý volně kmitající oscilátor zastaví ve své rovnovážné poloze.



Obr.1.17

Pozorujeme-li kmitavý pohyb téhož pružinového oscilátoru v tekutinách o různé viskozitě a tím i různé síle odporu prostředí proti jeho pohybu (např.vzduch, voda, olej apod.), zjistíme, že tlumení **ovlivňuje** také úhlovou **frekvenci** volného kmitání.

Frekvence volných **tlumených** kmitů oscilátoru je vždy **menší**, než jeho (při volném kmitání skutečných oscilátorů jen teoretická) **vlastní** úhlová frekvence ω_0. S rostoucím tlumením se frekvence volného kmitání (téhož) oscilátoru zmenšuje. Příliš velké tlumení rozkmitaného oscilátoru vede k jeho **neperiodickému** kmitavému pohybu, jehož amplituda výchylky velmi rychle klesá.

I když tlumením pohybu dochází k úbytku mechanické energie její přeměnou ve vnitřní energii oscilátoru a jeho látkového okolí, velmi často je záměrně zvětšujeme, abychom co nejrychleji utlumili nežádoucí kmitavé pohyby. Tento úkol mají - jak již název napovídá - např. tlumiče automobilů, záměrně je např. zvyšováno i tlumení ruček měřicích přístrojů.

K tlumení pohybu olovnice, kterou je možno považovat za matematické kyvadlo a která se používá např. ve stavebnictví k určení svislého směru, stačí při větrném počasí její ponoření do nádoby s vodou.

Velké námořní lodě využívají k tlumení svého náklonu při vlnobití důmyslného zařízení, využívajícího zákon zachování (vektoru) momentu hybnosti. Hluboko v podpalubí těchto lodí je umístěn velký volný setrvačník, jehož osa otáčení je pevně spojena s kýlem lodi a má při klidném moři např. svislý směr. Je-li tento setrvačník uveden do rotačního pohybu před očekávaným vlnobitím, získá konstantní moment hybnosti vzhledem k ose otáčení - vektor značné velikosti, jehož vektorovou přímkou je (svislá) osa rotace v okamžiku jeho roztočení.

Kdyby osa rotace setrvačníku nebyla spojená s lodí, zachovávala by jako nositelka konstantního vektoru svůj směr i při libovolném náklonu lodi (této vlastnosti je využito v gyrokompasu na jiném místě lodi). Vzhledem k pevnému spojení s kýlem se však směr osy rotace při vlnobití mění a vektor momentu hybnosti volného setrvačníku, jehož je osa rotace nositelkou, tak "porušuje" zákon o svém zachování. Reakcí setrvačníku na tento "přestupek" je tzv.gyroskopický silový moment, usilující o okamžitý návrat osy rotace do jejího původního (svislého) směru. Toto silové působení sice nemůže zabránit vzniku náklonu lodi, velmi účinně však tlumí jeho amplitudu při návratu lodi do optimální plavební polohy.

Nepřetržitému úbytku mechanické energie následkem tlumení kmitajícího oscilátoru lze zabránit, jestliže na oscilátor působíme **vnější periodickou silou** vhodné frekvence. Prací této síly získává oscilátor (zvnějšku) mechanickou energii, kterou nahrazuje ztráty své vlastní mechanické energie, způsobené tlumením. Tato vnější periodická síla uvádí do kmitavého pohybu ("probouzí") i původně klidný oscilátor a proto jí říkáme **budicí síla**.

Harmonicky proměnnou vnější budicí sílu $\vec{F}(t)$ můžeme vyjádřit jednoduchou rovnicí

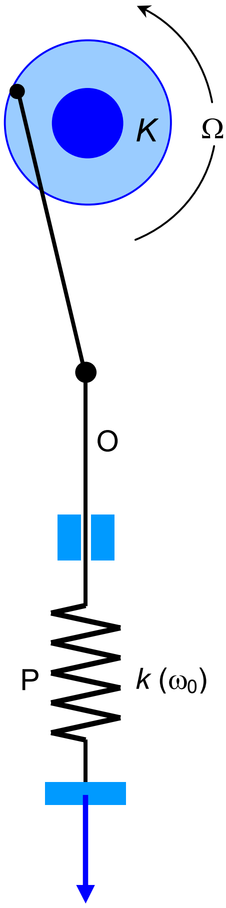
$$\vec{F}(t) = \vec{F}_{\mathrm{m}} \sin \Omega t \ ;$$

$F_{\mathrm{m}} = \left|\vec{F}_{\mathrm{m}}\right|$ je amplituda velikosti budicí síly a Ω je její úhlová frekvence. Touto frekvencí "nutí" budicí síla kmitat i oscilátor, na který působí. Důsledkem tohoto působení jsou **nucené kmity** oscilátoru, jejichž frekvence je rovna frekvenci budicí síly Ω.

Působení harmonické budicí síly na mechanický oscilátor lze vyvolat např. pomocí jednoduchého zařízení, znázorněného na **obr.1.18**.

Otáčíme-li kotoučem K úhlovou rychlostí Ω, pohybuje se ojnice O harmonickým pohybem (stejně jako průmět bodu pohybujícího se rovnoměrně po kružnici do libovolného průměru kružnice). Ojnice O proto působí na pružinový oscilátor P (vnější) harmonicky proměnnou budicí silou $\vec{F}(t)$ a nutí jej kmitat s úhlovou frekvencí Ω.

Velmi zajímavá je odezva oscilátoru na působení budicí sily téže amplitudy a proměnné frekvence. Pomocí zařízení na **obr.1.18** získáme takovou budící sílu spojitou změnou otáček kotouče K. Ukazuje se, že při některých frekvencích budící síly je odezva oscilátoru, měřená amplitudou jeho nucených kmitů, nepatrná, při jiných frekvencích je naopak reakce oscilátoru velmi intenzivní a amplituda jeho nucených kmitů značná.



Obr.1.18

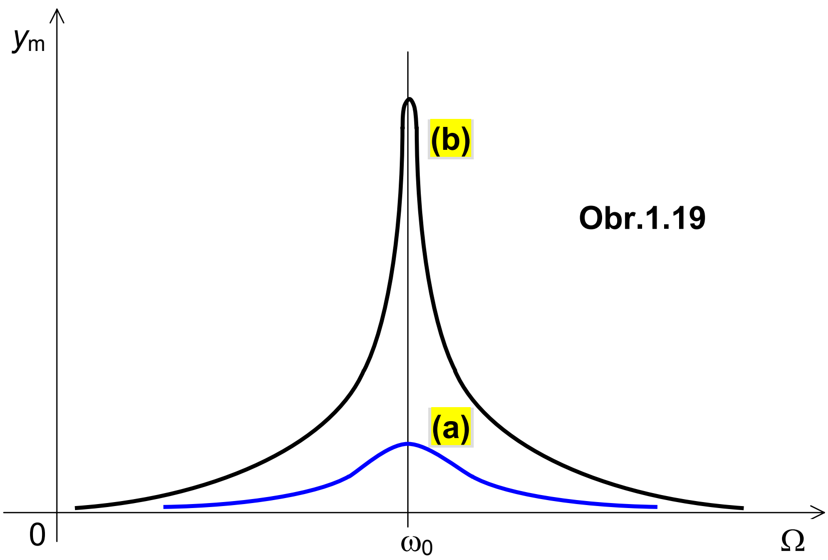
Znázorníme-li závislost amplitudy nucených kmitů y_m na frekvenci Ω budicí síly o stálé amplitudě, získáme tzv. **rezonanční křivku** oscilátoru (**obr.1.19**).

Její maximum v bodě $\Omega = \omega_0$ ukazuje, že oscilátor reaguje amplitudou svých nucených kmitů na působení budicí síly nejintenzivněji tehdy, když je úhlová frekvence budicí síly shodná s jeho vlastní úhlovou frekvencí ω_0. Této situaci, při níž budicí síla nutí oscilátor kmitat s jeho vlastní frekvencí, říkáme **rezonance**.

Tvar rezonanční křivky daného oscilátoru (**obr.1.19**) závisí na jeho tlumení. Při velkém tlumení **(a)** je rezonanční křivka plochá a maximum amplitudy je (při téže amplitudě velikosti budicí síly) menší, než v případě, kdy je tlumení malé **(b)**.

Při **rezonanci** přijímá oscilátor "nejochotněji" periodickou "dodávku" vnější mechanické energie, jejíž část použije na krytí ztrát, způsobených tlumením a zbytek na zvětšování amplitudy své výchylky. Rezonanční nucené kmity pak mohou nabýt tak velké amplitudy, že deformace jimi způsobené mohou vést k poškození nebo zničení oscilátoru.

Taková situace může nastat např. při tzv. **kritických** otáčkách točivých strojů. Tyto otáčky vyvolávají budicí sílu o rezonanční frekvenci vzhledem k jejich součástem i okolním tělesům (např. rezonanční nucené kmitání karoserie automobilu nebo lodního trupu při určitých otáčkách motoru nebo lodního hřídele).

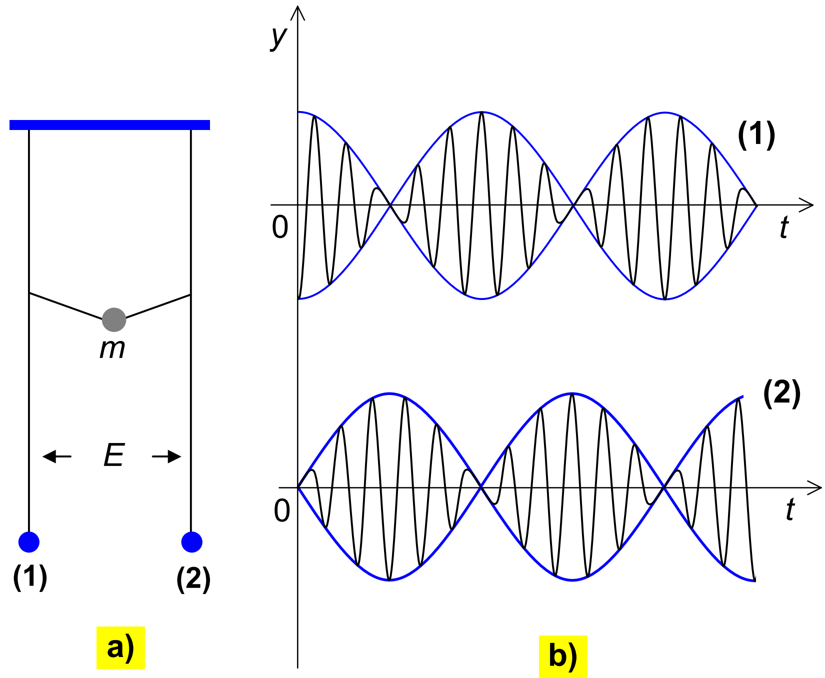


Obr.1.19

V těchto případech je rezonance jevem **nežádoucím** a amplitudu rezonančních kmitů je nutno zmenšit co největším tlumením nebo konstrukční změnou vlastní frekvence kmitání poškoditelných částí těchto zařízení.

V jiných oborech lidské činnosti je naopak rezonance prospěšná a žádoucí. Tak je tomu např. v hudební **akustice** (bez rezonančních částí hudebních nástrojů bychom jejich zvuk téměř neslyšeli), rezonance elektrických oscilátorů (jejich naladění na tutéž frekvenci) je základem radiotelegrafie apod.

Zajímavé pokusy s rezonančními nucenými kmity lze provádět se dvěma (nebo více) oscilátory (**obr.1.20a**), které jsou spolu spojeny (svázány) **vazbou**. V našem případě jsou to dvě matematická kyvadla téže délky, jejichž vzájemnou vazbu tvoří niť s tělískem proměnné hmotnosti *m*, ovlivňující **tuhost** vazby. Tlumení kyvadel, které je při jejich pohybu ve vzduchu velmi malé, můžeme zanedbat.



Obr.1.20

Rozkmitáme-li (volně) jedno z původně klidných kyvadel kolmo k rovině jejich závěsů v rovnovážné poloze, přenáší se toto kmitání prostřednictvím vazby i na druhé kyvadlo. Přenos kmitání prvního kyvadla představuje pro druhé (původně klidné) kyvadlo působení budící síly, která jej nutí kmitat s jeho vlastní frekvencí. V důsledku tohoto buzení začne druhé kyvadlo konat rezonanční nucené kmity a odebírá prostřednictvím vazby mechanickou energii prvnímu kyvadlu, jehož amplituda výchylky se ztrátou energie klesá.

Po určité době se proto první kyvadlo zastaví, zatímco druhé kmitá v tomto okamžiku s maximální amplitudou výchylky. V daném okamžiku jsou tedy obě kyvadla v opačných pohybových stavech než na začátku a celý děj (rezonanční přenos mechanické energie z jednoho kyvadla na druhé) se začíná opakovat v opačném směru.

Na **obr.1.20b** je znázorněn časový průběh amplitudy výchylek obou **vázaných** (**spřažených**) kyvadel. Obě tyto závislosti jsou stejnými periodickými funkcemi času a jejich časové posunutí je rovno polovině periody těchto funkcí.

Pokud by se délky kyvadel (vlastní frekvence vázaných oscilátorů) výrazně lišily a vazba mezi nimi by byla velmi volná (hmotnost tělíska na vazebné niti by byla nepatrná), k přechodu energie a nucenému kmitání druhého kyvadla by vůbec nedošlo. Tento výsledek potvrzuje, že oscilátor prakticky **nereaguje** na působení budící síly, jejíž frekvence se výrazně liší od jeho vlastní frekvence.

PŘÍKLAD

Při jak velké rychlosti vlaku dojde k maximálnímu rozkmitání vagónů následkem nárazů kol na spoje mezi kolejnicemi? Délka kolejnice je l, péra vagónu jsou zatížena jeho tíhou G, a silou o velikosti F se péra dále stlačí o délku h.

ŘEŠENÍ

Dané veličiny: l, G, F, h. **Úkol:** výpočet $v \Rightarrow y_\mathrm{m} = y_\mathrm{m,max}$

Silové impulsy působící na vagón při nárazech kol na kolejnicové spoje můžeme považovat za působení periodické neharmonické budicí síly, jejíž frekvenci určíme jako podíl dráhy vagónu za jednotku času (velikosti v jeho rychlosti) a délky kolejnice l; je tedy $f = v/l$.

Vlastní frekvenci f_0 oscilátoru tvořeného vagónem hmotnosti $m = G/g$ a jeho péry o tuhosti $k = F/h$ určíme ze vztahu

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Fg}{Gh}}\,.$$

Při rezonanci budící síly a vagónu - oscilátoru platí

$$f = f_0 \Rightarrow \frac{v}{l} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Fg}{Gh}}\,.$$

Odtud pro potřebnou (ale v praxi nežádoucí) velikost rychlosti jízdy vagónu dostáváme

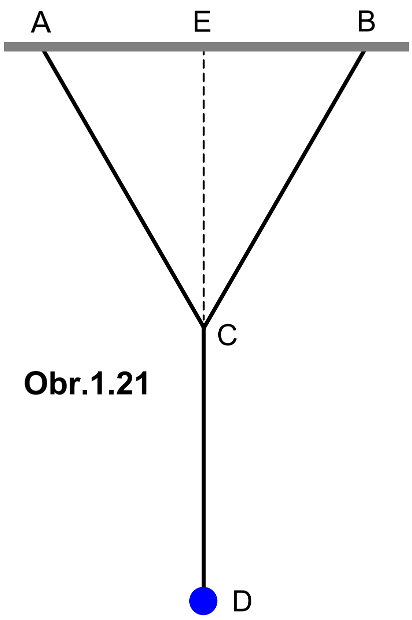
$$\boxed{v = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{Fg}{Gh}}}$$

Provedeme-li zkoušku správnosti jednotek tohoto výrazu, dostaneme

$$\mathrm{m}\sqrt{\frac{\mathrm{N\cdot m\cdot s^{-2}}}{\mathrm{N\cdot m}}} = \mathrm{m\cdot s^{-1}} = [v].$$

SKLÁDÁNÍ KMITAVÝCH POHYBŮ

Na **obr.1.21** je tzv. **složené** matematické kyvadlo. Jedna jeho část - kyvadlo CD - může kývat v rovině papíru, druhá část - kyvadlo CE - v rovině k ní kolmé. Rozkývemeli obě kyvadla s omezením amplitudy nutným k jejich harmonickému pohybu, koná kulička pohyb, složený ze dvou navzájem kolmých harmonických kmitání. Tento pohyb může být obecně velmi složitý.



Obr.1.21

Při stejné délce $\left(\overline{CD} = \overline{CE}\right)$ mají obě kyvadla stejnou frekvenci a proto jejich kmitavé (harmonické) pohyby o téže periodě nazýváme **izochronní**. Pohyb kuličky, složený ze dvou navzájem kolmých izochronních harmonických kmitů, se ve srovnání s obecným případem $\left(\overline{CD} \neq \overline{CE}\right)$ velmi zjednoduší, je **periodický** a **izochronní** s pohybem obou kyvadel. Jeho trajektorií je **elipsa**, která pro určité hodnoty fázového posunutí skládaných pohybů přechází v **úsečku** nebo **kružnici**.

Výsledky pokusu se složeným matematickým kyvadlem lze zobecnit a vyslovit následující tvrzení:

Působí-li na oscilátor dvě elastické, nebo harmonické budicí síly, nutí jej současně konat harmonické pohyby s obecně různými trajektoriemi, frekvencemi i amplitudami výchylky.

Oscilátor může současně splnit "požadavky" obou sil pouze tak, že koná pohyb, který je **složením** neboli **superpozicí** harmonických pohybů, "předepisovaných" mu těmito silami.

Pohyb, složený z několika harmonických pohybů, může být obecně velmi složitý. Výsledkem skládání těchto pohybů může být naopak i relativní klid oscilátoru. Složený pohyb oscilátoru je harmonickým, kmitavým, nebo alespoň periodickým pohybem pouze při speciálních vlastnostech skládaných harmonických kmitů - např. při skládání **izochronních navzájem kolmých harmonických** kmitů.

Výsledná poloha oscilátoru je v každém okamžiku rovna vektorovému součtu vektorů okamžitých výchylek obou skládaných kmitavých pohybů. Podle **principu superpozice** tento (vektorový) součet nezávisí na pořadí sčítanců. Platnost tohoto principu je obecná a můžeme jej použít ke složení libovolného konečného počtu (kmitavých) pohybů. Ukážeme si nyní jeho použití při skládání **izochronních stejnosměrných harmonických** kmitů.

Trajektoriemi skládaných **stejnosměrných** kmitů, které má konat současně tentýž oscilátor, jsou úsečky téže přímky.

Uvažujme pro jednoduchost skládání dvou fázově posunutých stejnosměrných izochronních harmonických pohybů téže amplitudy, jejichž rovnovážné polohy jsou totožné a leží v počátku soustavy souřadnic (osa y). Počátek měření času zvolme tak, aby počáteční fáze jednoho z nich (např.prvního) byla nulová. Souřadnice koncových bodů navzájem rovnoběžných vektorů $\vec{y}_1(t)$, $\vec{y}_2(t)$ okamžité výchylky obou pohybů v libovolném okamžiku t pak můžeme vyjádřit jako

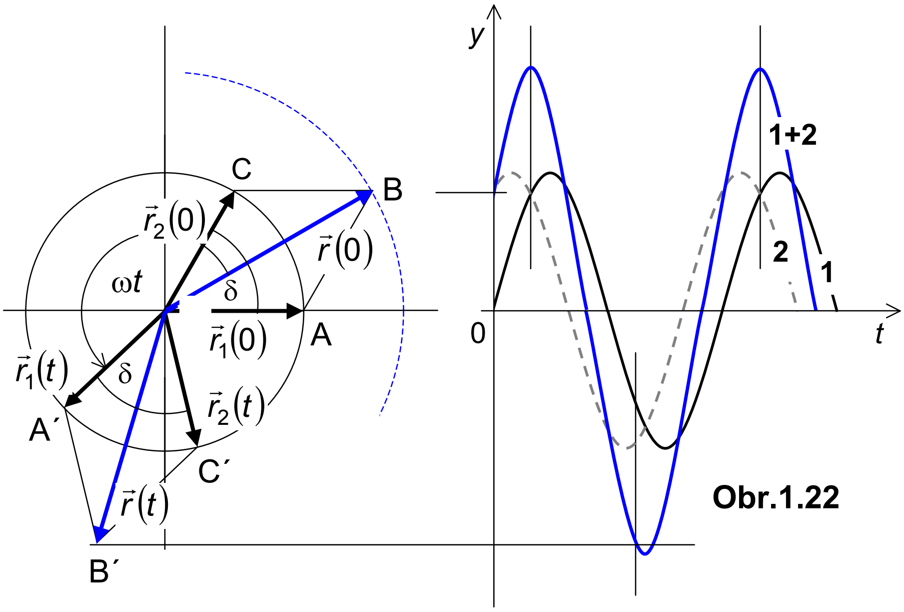
$$y_1(t) = y_m \sin \omega t \ ; \ y_2(t) = y_m \sin(\omega t + \delta) \ ,$$

kde $\delta = \varphi_2(0)$ je počáteční fáze **druhého** pohybu, takže **fázové posunutí** skládaných pohybů je $\Delta\varphi = \varphi_2(0) - \varphi_1(0) = \delta$.

Pro vektor **výsledné** okamžité výchylky $\vec{y}\,(t)$ v okamžiku t podle principu superpozice platí

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_1(t) + \vec{y}_2(t) = \vec{y}_2(t) + \vec{y}_1(t).$$

Skládané harmonické kmity $\vec{y}_1(t)$ a $\vec{y}_2(t)$ můžeme považovat za harmonické pohyby kolmých průmětů koncových bodů vektorů $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ otáčejících se kolem společného počátečního bodu 0 stálou úhlovou rychlostí ω do osy y (**obr.1.22**). Tyto vektory mají velikost $r_1 = r_2 = y_m$ a svírají spolu úhel δ.



Obr.1.22

Vektorový součet $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$ má při **stálé** odchylce δ vektorů $\vec{r}_1(t)$ a $\vec{r}_2(t)$ **stálou** velikost r, kterou můžeme z kosočtverce OABC (nebo OA′B′C′) vyjádřit jako

$$r = 2y_m \cos\frac{\delta}{2}$$

a otáčí se kolem počátku stálou úhlovou rychlostí ω. Vektor $\vec{y}(t)$ výsledné okamžité výchylky oscilátoru je kolmým průmětem vektoru $\vec{r}(t)$ do osy y, takže platí

$$\boxed{y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2y_m \cos\frac{\delta}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right)}$$

Pohyb oscilátoru, konajícího současně dva stejnosměrné izochronní harmonické pohyby, je tedy opět pohybem **harmonickým**, **izochronním** a **stejnosměrným** s pohyby, jejichž složením vznikl.

Amplituda výchylky $y_{r,m} = 2y_m \cos(\delta/2) = \text{konst.}$ výsledného kmitání závisí na **fázovém rozdílu** skládaných harmonických kmitů $\Delta\varphi = \delta$. Mají-li oba skládané pohyby **tutéž fázi**, je jejich fázový rozdíl $\delta = 0$ a amplituda výchylky výsledného kmitání oscilátoru má **maximální** hodnotu $y_{r,m} = 2y_m = y_m + y_m$.

Jsou-li fáze skládaných pohybů **opačné**, je $\delta = \pi$ a $\cos(\delta/2) = \cos(\pi/2) = 0$, takže amplituda výchylky výsledného pohybu je **nulová** $(y_{r.m} = y_m - y_m = 0)$ a oscilátor je v relativním klidu. Tyto výsledky lze zobecnit:

Složením dvou **stejnosměrných izochronních harmonických** pohybů je **harmonický** pohyb, který je **izochronní a stejnosměrný** se skládanými pohyby. Mají-li skládané pohyby různé amplitudy výchylky $y_{m1} \neq y_{m2}$, nabývá amplituda výchylky výsledného kmitání při nulovém fázovém posunutí $\delta = 0$ (**při stejné fázi** skládaných pohybů) **maximální** hodnoty $y_{m1} + y_{m2}$. Jsou-li fáze skládaných pohybů **opačné** $(\delta = \pi)$, je amplituda výsledného kmitání **minimální** a rovna $|y_{m1} - y_{m2}|$.

Zajímavý a pro praxi důležitý je výsledek skládání neizochronních (stejnosměrných) harmonických pohybů, jejichž frekvence jsou **velmi blízké**. Složením takových pohybů vzniká kmitavý, harmonickému kmitání podobný pohyb, jehož amplituda se periodicky mění **od nuly k jistému maximu**. Časový průběh tohoto složeného pohybu, jemuž říkáme **rázy**, je velmi podobný časové závislosti kmitání některého z vázaných oscilátorů na **obr.1.20**.

Existenci (slyšitelných) rázů můžeme ukázat např. při pokusu se dvěma stejnými ladičkami. Rozezvučíme-li je, slyšíme jediný tón, jehož hlasitost postupně klesá. Připevníme-li k ramenu jedné z ladiček kousek drátu, změníme tak nepatrně její kmitočet. Znějí-li nyní obě ladičky, slyšíme opět jediný tón, jehož hlasitost však periodicky kolísá - dva kmitavé pohyby s nepatrně odlišnými frekvencemi se skládají a vznikají rázy, nazývané v hudební akustice **zázněje**.

Vymizení rázů je v hudební akustice známkou dokonale shodného naladění dvou tónů u různých hudebních nástrojů. V elektrotechnice pomocí rázů vyrovnáváme frekvence dvou alternátorů - zdrojů střídavého elektrického napětí. Oba alternátory, jejichž frekvence chceme změnou otáček jednoho z nich vyrovnat, připojíme k téže žárovce. Žárovka se začne rozsvěcovat a zhasínat s frekvencí, rovnou rozdílu frekvencí obou alternátorů. V okamžiku, kdy žárovka začne trvale svítit, jsou frekvence obou alternátorů stejné.

ÚLOHA

Znázorněte graficky výsledek superpozice stejnosměrných izochronních harmonických kmitů o rovnicích:

a) $y_1 = y_m \sin(\omega t + \pi/2);\ y_2 = y_m \sin\omega t$, **b)** $y_1 = y_m \sin\omega t;\ y_2 = -2y_m \sin\omega t$.