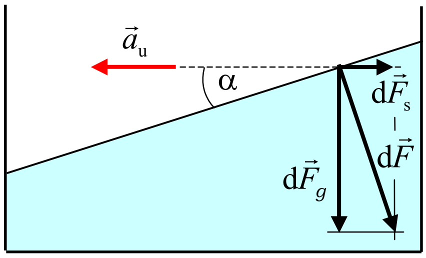
# 12. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

**12.1** O jaký úhel se odchýlí od vodorovné roviny hladina kapaliny v cisternovém voze, který brzdí se zpomalením $5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$?



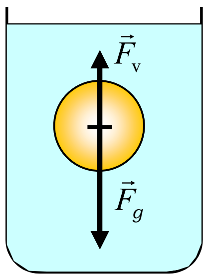

$a_\mathrm{u} = 5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; . $\alpha = ?$

Volná hladina kapaliny je v každém svém bodě **kolmá** k výslednici sil, které v daném bodě na kapalinu působí. V našem případě na element $\mathrm{d}m$ kapaliny v každém bodě volné hladiny působí síla **tíhová** $\mathrm{d}\vec{F}_g = \vec{g}\,\mathrm{d}m$, a **setrvačná** síla $\mathrm{d}m$. Pro jejich výslednici platí

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}\vec{F}_g + \mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{s} = \left(\vec{g} - \vec{a}_\mathrm{u}\right)\mathrm{d}m\ ;\ \frac{\mathrm{d}F_\mathrm{s}}{\mathrm{d}F_g} = \mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_\mathrm{u}}{g}}\ ,\ \alpha = 27^\circ$$

**12.2** Na plnou kouli ve vzduchu působí tíhová síla o velikosti $390\ \mathrm{N}$. Na tutéž kouli ponořenou ve vodě působí výsledná síla o velikosti $340\ \mathrm{N}$. Hustota vody je $1\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jaký je objem $V$ koule? Jaká je hustota $\rho_1$ látky z níž je koule vyrobena? Jaký objem $V'$ by musela mít dutina v kouli, aby se ve vodě vznášela?




$F_g = 390\ \mathrm{N}$; $F = 340\ \mathrm{N}$; $\rho = 1\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. $V, \rho_1, V' = ?$

Výsledná síla $\vec{F}$ působící na ponořenou kouli je výslednicí tíhové síly $\vec{F}_g$ a hydrostatické vztlakové síly $\vec{F}_\mathrm{v}$. Platí tedy

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_\mathrm{v} \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_g - \vec{F}_\mathrm{v}\ ;\ \ F = F_g - V\rho g \Rightarrow \boxed{V = \frac{F_g - F}{\rho g}}\ ,$$

$$V = 5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}.$$

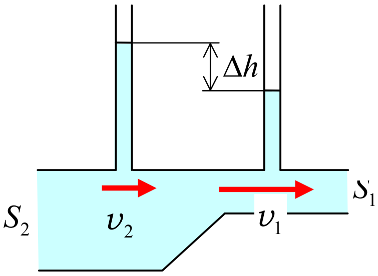
Hustotu $\rho_1$ látky, z níž je koule zhotovena, určíme z jejího objemu $V$ a tíhové síly $F_g$

$$F_g = V\rho_1 g \Rightarrow \rho_1 = \frac{F_g}{Vg} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = \frac{F_g}{F_g - F}\rho}\ ,\ \rho_1 = 7{,}8\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}.$$

Objem $V'$ dutiny v kouli získáme z podmínky vznášení koule ve vodě – střední hustota koule s dutinou musí být rovna hustotě vody - hmotnost koule s dutinou musí tedy být rovna hmotnosti jí vytlačené vody při plném ponoření.

$$V\rho = V\rho_1 - V'\rho_1 \Rightarrow \boxed{V' = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1}V}\ ,\ V' = 4{,}4\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$$

**12.3** Voda proudí trubicí nestejného průřezu. Jaký je její objemový tok, jestliže v místech s průřezy $S_1 = 10\ \mathrm{cm^2}$, resp. $S_2 = 20\ \mathrm{cm^2}$ umístěné manometrické trubice vykazují rozdíl hladin $\Delta h = 20\ \mathrm{cm}$? Vnitřní tření proudící vody zanedbáváme.




$S_1 = 1\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}^3$; $S_2 = 2\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}^3$;
$\Delta h = 2\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}$. $Q_V = ?$

Pro rozdíl **statických** tlaků v rozšířené a zúžené části trubice platí $p_2 - p_1 = \Delta h \rho g$.

Z BERNOULLIHO rovnice současně dostáváme $p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right)$, takže

$$\frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \Delta h\,\rho g \Rightarrow\ v_1^2 - v_2^2 = 2\Delta h\,g\,.$$

Z rovnice kontinuity obdržíme $S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow$ $v_2 = \dfrac{S_1}{S_2}v_1$. Dosadíme-li tento výraz do předchozího vztahu, dostaneme

$$v_1^2\left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) = 2\Delta hg \Rightarrow v_1^2 S_1^2\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right) = 2\Delta hg \Rightarrow\ v_1^2 S_1^2\frac{S_2^2 - S_1^2}{S_1^2 S_2^2} = 2\Delta hg \Rightarrow$$

$$\boxed{Q_V = S_1 v_1 = S_1 S_2\sqrt{\frac{2\Delta h\,g}{S_2^2 - S_1^2}}}\ ,\ Q_V = 2{,}3\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

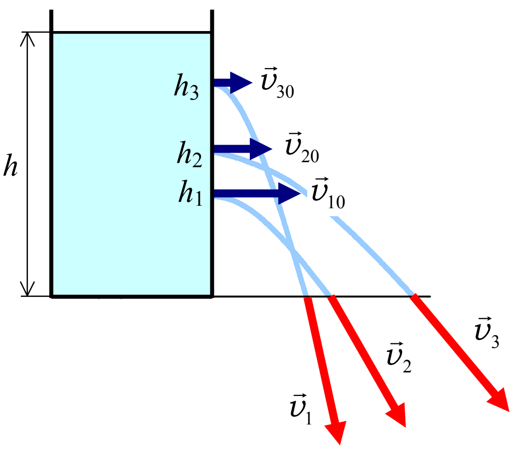
**12.4** Voda proudí trubicí nestejného průřezu. V nejširší části trubice má rychlost $v_1 = 0{,}50\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a tlak $p_1 = 1{,}5\cdot10^5\ \mathrm{Pa}$. V užší části má tlak $p_2 = 2{,}04\cdot10^4\ \mathrm{Pa}$. Jakou má voda rychlost v této užší části, zanedbáváme-li vnitřní tření?

$\rho = 1\cdot10^3\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$; $v_1 = 0{,}50\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$; $p_1 = 1{,}5\cdot10^5\ \mathrm{Pa}$; $p_2 = 2{,}04\cdot10^4\ \mathrm{Pa}$; $v_2 = ?$

Protože není uvedeno jinak, budeme předpokládat, že trubice je vodorovná. Z BERNOULLIHO rovnice dostáváme

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow 2p_1 + \rho v_1^2 = 2p_2 + \rho v_2^2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2\left(p_1 - p_2\right)}{\rho} + v_1^2}}$$

**12.5** Na vodorovném stole je nádoba, v jejíž svislé stěně je několik otvorů jeden nad druhým. Nádoba je naplněna kapalinou. Dokažte, že kapalina tryskající z otvorů dopadá na stůl rychlostmi o téže velikosti.




Uvažujme otvor ve výšce $y < h$ stěny nádoby. Hydrostatický tlak v úrovni otvoru je $p = (h - y)\rho g$.

Pro výtokovou rychlost $v_{x0}(y)$ kapaliny z otvoru ve výšce $y$ (vodorovnou složku rychlosti vodorovného vrhu) tedy platí

$$v_{x0}(y) = \sqrt{2(h - y)g}\,.$$

Velikost **svislé** složky rychlosti vodorovného vrhu kapaliny při dopadu na stůl z výšky $y$ je $v_y(y) = \sqrt{2yg}$.

Velikost **výsledné** rychlosti kapaliny při dopadu na stůl je tedy

$$\upsilon(y)=\sqrt{\left[\upsilon_{x0}(y)\right]^2+\left[\upsilon_y(y)\right]^2}\Rightarrow$$

$$\upsilon(y)=\sqrt{2(h-y)g+2yg}\Rightarrow\boxed{\upsilon=\sqrt{2hg}}$$

Z výsledku je patrné, že velikost dopadové rychlosti kapaliny na stůl **nezávisí** na poloze otvoru, z něhož kapalina vytéká – je tedy stejná pro výtok **libovolným** otvorem ve stěně nádoby.

**12.6** Ve dně nádoby je malý otvor, kterým vytéká voda. Volná hladina vody v nádobě je $30\,\mathrm{cm}$ nade dnem. Jakou rychlostí vytéká voda v těchto případech? **a)** Nádoba je v klidu. **b)** Nádoba se pohybuje rovnoměrně vzhůru. **c)** Nádoba se pohybuje vzhůru se zrychlením $120\,\mathrm{cm\cdot s^{-2}}$. **d)** Nádoba padá volným pádem.

$$\upsilon_1=0;\ \vec{\upsilon}_2=\overrightarrow{\mathrm{konst.}};\ a_{\mathrm{u},1}=1{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\wedge\vec{a}_{\mathrm{u},1}\uparrow\downarrow\vec{g};\ \vec{a}_{\mathrm{u},2}=\vec{g};\ \upsilon=?$$

**a), b)** Na vodu působí v klidné nádobě pouze objemová síla a v hloubce $h$ pod volnou hladinou způsobuje hydrostatický tlak $p=h\rho g$. Voda vytéká v obou případech rychlostí $\boxed{\upsilon=\sqrt{h\rho g}}$

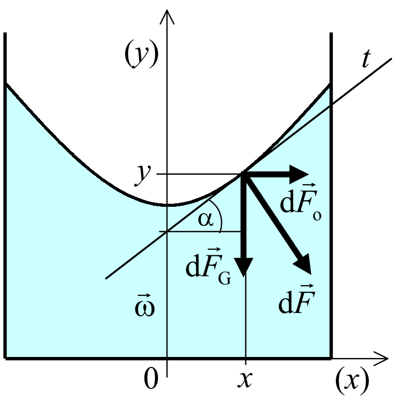
**c)** Na element vody působí v tomto případě kromě tíhové síly ještě (objemová) setrvačná síla $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{s}=-\vec{a}_{\mathrm{u},1}\rho\,\mathrm{d}V$ $\left(\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{s}\uparrow\uparrow\vec{g}\right)$. V hloubce $h$ pod volnou hladinou vyvolává proto současné působení těchto dvou objemových sil hydrostatický tlak

$$p=h\rho\left(g+a_{\mathrm{u},1}\right)\Rightarrow\boxed{\upsilon=\sqrt{h\rho\left(g+a_{\mathrm{u},1}\right)}}$$

**d)** Na element vody působí v tomto případě kromě tíhové síly ještě (objemová) setrvačná síla $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{s}=-\vec{a}_{\mathrm{u},2}\rho\,\mathrm{d}V$ $\left(\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{s}\uparrow\downarrow\vec{g}\right)$. V hloubce $h$ pod volnou hladinou vyvolává proto současné působení těchto dvou objemových sil hydrostatický tlak

$$p=h\rho\left(g-a_{\mathrm{u},2}\right)=h\rho\left(g-g\right)=0\Rightarrow\boxed{\upsilon=0}$$

**12.7** Jaký tvar má volná hladina kapaliny v nádobě tvaru válce, která se otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí $\omega$?




$$\omega;\ g;\ y=y(x)=?$$

Na element kapaliny o hmotnosti $\mathrm{d}m$ nacházející se na volné hladině působí při rotaci nádoby tíhová síla $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{G}$ o velikosti $\mathrm{d}F_\mathrm{G}=g\,\mathrm{d}m$ a setrvačná odstředivá síla $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{o}$ o velikosti $\mathrm{d}F_\mathrm{o}=x\,\omega^2\mathrm{d}m$; $x$ je vzdálenost elementu od osy otáčení, $\omega$ velikost úhlové rychlosti rotace nádoby (kolem osy $\mathrm{o}\equiv 0y$). Výsledná síla působící na uvažovaný element $\mathrm{d}m$ kapaliny je pak $\mathrm{d}\vec{F}=\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{G}+\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{o}$.

Hodnota funkce tangens úhlu $\alpha$, svíraného nezápornou souřadnicovou poloosou $0x$ a tečnou ke grafu funkce $y = y(x)$, je rovna hodnotě první derivace $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ funkce $y = y(x)$ v bodě $x$ a tedy

$$\frac{\mathrm{d}F_\mathrm{o}}{\mathrm{d}F_\mathrm{G}} = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\omega^2}{g}x \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{\omega^2}{g}x\,\mathrm{d}x\,.$$

**Integrací** této rovnice (vlevo vzhledem k $y$, vpravo vzhledem k $x$) dostáváme

$$\boxed{y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + y_0}$$

Integrací získaná funkce je rovnicí **paraboly** s vrcholem v bodě $[0; y_0]$, jejíž osa je totožná s osou otáčení nádoby s kapalinou.

Přeneseme-li náš problém do trojrozměrného prostoru, můžeme říci, že volná hladina kapaliny v rotující nádobě má tvar **rotačního paraboloidu** – v každém jejím bodě je tato kvadratická plocha (volná hladina kapaliny) **kolmá** na výslednou sílu $\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{G} + \mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{o}$.

---

**12.8** Z kolika hmotnostních procent mědi $\left(\rho_\mathrm{Cu} = 8{,}8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}\right)$ a cínu $\left(\rho_\mathrm{Sn} = 7{,}3\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}\right)$ se skládá bronzová krychle má-li na vzduchu tíhu $6{,}3\ \mathrm{kN}$ a ve vodě $5{,}54\ \mathrm{kN}$.

$\rho_\mathrm{Cu} = 8{,}8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$; $\rho_\mathrm{Sn} = 7{,}3\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, $F_\mathrm{G,1} = 5{,}54\ \mathrm{kN}$, $F_\mathrm{G,2} = 6{,}30\ \mathrm{kN}$; $\%_{(\mathrm{m})}\mathrm{Cu,Sn} = ?$

Z rozdílu tíhy na vzduchu a ve vodě určíme velikost hydrostatické vztlakové síly $F_\mathrm{v}$ a z ní objem $V$ tělesa

$$F_\mathrm{G,1} - F_\mathrm{G,2} = F_\mathrm{v} = V\rho_\mathrm{H_2O}g \Rightarrow V = \frac{F_\mathrm{G,1} - F_\mathrm{G,2}}{\rho_\mathrm{H_2O}g}\,.$$

Dále platí:

$$V_\mathrm{Cu} + V_\mathrm{Sn} = V \wedge V_\mathrm{Cu}\rho_\mathrm{Cu}g + V_\mathrm{Sn}\rho_\mathrm{Sn}g = F_\mathrm{G,1}\,.$$

Z této soustavy rovnic dostáváme

$$V_\mathrm{Sn} = V - V_\mathrm{Cu} \Rightarrow V_\mathrm{Cu}\rho_\mathrm{Cu}g + \left(V - V_\mathrm{Cu}\right)\rho_\mathrm{Sn}g = F_\mathrm{G,1} \Rightarrow$$

$$V_\mathrm{Cu} = \frac{1}{\left(\rho_\mathrm{Cu} - \rho_\mathrm{Sn}\right)g}\left(F_\mathrm{G,1} - V\rho_\mathrm{Sn}g\right) \Rightarrow V_\mathrm{Cu} = \frac{1}{\left(\rho_\mathrm{Cu} - \rho_\mathrm{Sn}\right)g}\left[F_\mathrm{G,1} - \frac{\rho_\mathrm{Sn}}{\rho_\mathrm{H_2O}}\left(F_\mathrm{G,1} - F_\mathrm{G,2}\right)\right].$$

Hmotnostní procentuální zastoupení **mědi** je pak

$$\%_{(\mathrm{m})}\mathrm{Cu} = \frac{V_\mathrm{Cu}\rho_\mathrm{Cu}g}{F_\mathrm{G,1}}10^2 \Rightarrow \boxed{\%_{(\mathrm{m})}\mathrm{Cu} = \frac{\rho_\mathrm{Cu}}{F_\mathrm{G,1}\left(\rho_\mathrm{Cu} - \rho_\mathrm{Sn}\right)}\left[F_\mathrm{G,1} - \frac{\rho_\mathrm{Sn}}{\rho_\mathrm{H_2O}}\left(F_\mathrm{G,1} - F_\mathrm{G,2}\right)\right]10^2}$$

---

**12.9** O kolik procent svého objemu se vynoří ze rtuti železná koule, nalije-li se na rtuť tolik vody, aby celá koule byla pod ní. Hustota železa je $\rho_\mathrm{Fe} = 7{,}8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, hustota rtuti je $\rho_\mathrm{Hg} = 13{,}6\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, hustota vody $\rho_\mathrm{H_2O} = 1\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$.

$\rho_\mathrm{Fe} = 7{,}8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$; $\rho_\mathrm{Hg} = 13{,}6\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$; $\rho_\mathrm{H_2O} = 1\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$; $x(\%V) = ?$

Tíha koule na vzduchu je $F_G = V\rho_{Fe}g$. Plave-li koule ve rtuti, je velikost tíhy koule rovna velikosti hydrostatické vztlakové síly $F_v = V_1\rho_{Hg}g$, kde $V_1$ je objem do rtuti ponořené části koule. Platí tedy

$$F_G = F_v \Rightarrow V\rho_{Fe}g = V_1\rho_{Hg}g \Rightarrow V_1 = \frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Hg}}V .$$

Nalijeme-li na rtuť vodu tak, aby celá koule byla ponořena [částí o objemu $V_2\left(<V_1\right)$ do rtuti, částí o objemu $V_3$ do vody], je výsledná hydrostatická vztlaková síla součtem dvou složek – hydrostatické vztlakové síly $V_2\rho_{Hg}g$ rtuti a hydrostatické vztlakové síly vody $V_3\rho_{H_2O}g$. Platí tedy

$$V\rho_{Fe}g = V_2\rho_{Hg}g + V_3\rho_{H_2O}g \wedge V_2 + V_3 = V .$$

$$V_3 = V - V_2 \Rightarrow V\rho_{Fe} = V_2\rho_{Hg} + \left(V - V_2\right)\rho_{H_2O} \Rightarrow V_2 = \frac{\rho_{Fe} - \rho_{H_2O}}{\rho_{Hg} - \rho_{H_2O}}V .$$

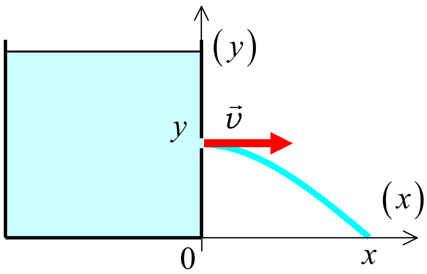
Hledanou hodnotu objemu, o nějž se koule „zalita vodou" vynoří ze rtuti v procentech (svého celkového objemu) určíme jako

$$x = \frac{V_1 - V_2}{V}10^2 \Rightarrow \boxed{x = \left(\frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Hg}} - \frac{\rho_{Fe} - \rho_{H_2O}}{\rho_{Hg} - \rho_{H_2O}}\right)10^2 \quad \left(\%\ \ V\right)}$$

**12.10** V nádobě je voda s hladinou ve výšce $h = 30\,\mathrm{cm}$. Jak vysoko nade dnem musí být otvor, aby z něj voda tryskala nejdále na vodorovnou rovinu, která je v úrovni dna?

$$h = 30\ \mathrm{cm}\,;\ y_{x_{max}} = ?$$

Element kapaliny opustivší otvor ve stěně nádoby se dále pohybuje vodorovným vrhem počáteční rychlostí $v = \sqrt{2\left(h-y\right)g}$. Okamžik dopadu elementu kapaliny na vodorovnou rovinu v úrovni dna nádoby určíme z podmínky $y = \frac{1}{2}gt^2 = 0$ jako $t = \sqrt{2y/g}$. Vzdálenost $x$ dopadu elementu kapaliny je tedy




$$x = v\,t \Rightarrow x = \sqrt{2\left(h-y\right)g}\sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow$$

$$x = 2\sqrt{\left(h-y\right)y} .$$

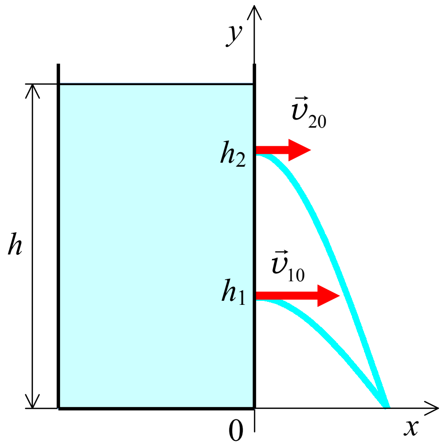
Vzdálenost $x$ dopadu je maximální (extrémní), když

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 0 \Rightarrow 2\frac{1}{2}\frac{-y+h-y}{\sqrt{\left(h-y\right)y}} = \frac{h-2y}{\sqrt{\left(h-y\right)y}} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{h}{2}}$$

**12.11** Ve svislé stěně válcové nádoby jsou nad sebou dva otvory ve výškách $h_1$ a $h_2$ nad jejím dnem. V jaké výšce $h$ musí být udržována volná hladina kapaliny v nádobě, aby proud kapaliny z obou otvorů dopadal do téhož místa vodorovného stolu, na němž nádoba stojí?

$h_1$; $h_2$; $h = ?$




Pro rychlosti kapaliny vytékající z otvorů platí:

$$y = h_1 \Rightarrow v_{10} = \sqrt{2(h-h_1)g}\,,\ y = h_1$$

a tedy

$$x_1 = v_{10}t \Rightarrow x_1 = t\sqrt{2(h-h_1)g};$$

$$y_1 = h_1 - \frac{1}{2}gt^2.\quad y = h_2 \Rightarrow v_{20} = \sqrt{2(h-h_2)g}\,,$$

a tedy

$$x_2 = v_{20}t \Rightarrow x_2 = t\sqrt{2(h-h_2)g};$$

$$y_2 = h_2 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Určíme nyní (**různé**) **okamžiky** $(t_{D,1},\ t_{D,2})$ **dopadu** těchto „vodorovných vrhů" na vodorovnou rovinu v níž leží dno nádoby

$$y_1 = y_2 = 0 \Rightarrow t_{D,1} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\ ;\ t_{D,2} = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}\,.$$

Pro vzdálenosti dopadu $(d_1, d_2)$ pak platí

$$d_1 = x_1(t_{D,1}) = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\sqrt{2(h-h_1)g} \Rightarrow d_1 = \sqrt{4h_1(h-h_1)}\,,$$

$$d_2 = x_2(t_{D2}) = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}\sqrt{2(h-h_2)g} \Rightarrow d_2 = \sqrt{4h_2(h-h_2)}\,.$$

Podmínka dopadu na stejné místo znamená, že $d_1 = d_2$ a tedy

$$\sqrt{4h_1(h-h_1)} = \sqrt{4h_2(h-h_2)} \Rightarrow h_1(h-h_1) = h_2(h-h_2) \Rightarrow h_1h - h_1^2 = h_2h - h_2^2 \Rightarrow$$

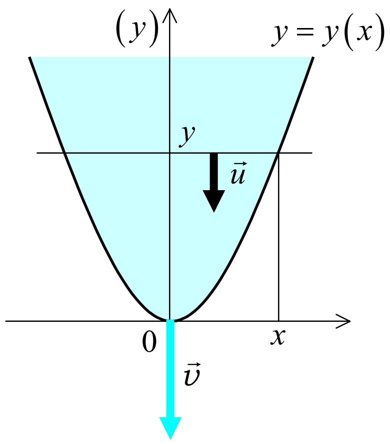
$$h(h_2-h_1) = h_2^2 - h_1^2 \Rightarrow \boxed{h = h_1 + h_2}$$

---

**12.12** Jaký tvar musí mít osově symetrická nádoba, aby při výtoku vody otvorem v jejím dně bylo klesání hladiny v nádobě rovnoměrné?
[rotační plocha s meridiánovou křivkou $y = kx^4$]

---

Uveďme nejdříve, že naším úkolem je nalezení analytického vyjádření $[y = y(x)]$ obecně osově symetrické rovinné křivky s osou symetrie $o \equiv 0y$, jejíž rotací kolem osy symetrie vznikne nádoba splňující zadání úlohy $(u = \text{konst.})$. Dané křivce říkáme poledníková, nebo také meridiánová křivka její rotací vzniklé symetrické plochy.




Je-li výška volné hladiny kapaliny v nádobě nade dnem rovna $y$, je rychlost kapaliny vytékající otvorem o průřezu $S$ ve dně rovna $v = \sqrt{2yg}$. Rovnice kontinuity má v našem případě tvar

$$\pi x^2 u = Sv \Rightarrow \pi x^2 u = S\sqrt{2yg} \Rightarrow$$

$$\pi^2 x^4 u^2 = 2S^2 g y \Rightarrow y = \frac{\pi^2 u^2}{2S^2 g} x^4 \Rightarrow \boxed{y = kx^4}$$

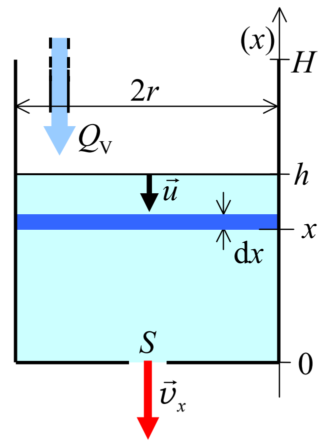
**11.13** Válcová nádoba nahoře otevřená má výšku $H = 20\ \text{cm}$ a poloměr $r = 5\ \text{cm}$. Uprostřed dna nádoby je otvor průřezu $S = 1\ \text{cm}^2$. Do nádoby přitéká shora voda z vodovodu při objemovém toku $Q_\text{V} = 140\ \text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. **a)** Jak vysoko vystoupí voda v nádobě? **b)** Za jak dlouho se nádoba vyprázdní, jestliže při dosažení maximální výšky hladiny vody v nádobě přítok vody zastavíme? **c)** Jaký pohyb koná hladina vody ve nádobě při výtoku vody otvorem ve dně?

$$\left[ h = \frac{Q_\text{V}^2}{2S^2 g};\ t = \frac{\pi r^2 Q_\text{V}}{S^2 g};\ \text{rovn. zpomalený} \right]$$

---

$H = 2 \cdot 10^{-1}\ \text{cm}$; $r = 5 \cdot 10^{-2}$; $S = 1 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$; $Q_\text{V} = 1{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3$; $h,\ t, v = ?$

---




**a)** Při plnění nádoby hladina vody stoupá a s ní roste i velikost rychlosti výtoku vody otvorem ve dně nádoby. Stoupání hladiny se zastaví a hladina se ustálí ve výšce $h$ v okamžiku, kdy je objemový tok vody otvorem ve dně nádoby stejný jako objemový tok $Q_\text{V}$ vody přitékající z vodovodu. Dostáváme tedy

$$Q_\text{V} = Sv_h = S\sqrt{2hg} \Rightarrow Q_\text{V}^2 = S^2 2hg \Rightarrow \boxed{h = \frac{Q_\text{V}^2}{2S^2 g}}$$

**b)** V okamžiku, kdy hladina vody klesne o vzdálenost $h - x$, je velikost $v_x$ výtokové rychlost vody v otvoru $S$ rovna $g$. V následujícím nekonečně krátkém časovém intervalu $\text{d}t$ tedy otvorem $S$ vyteče objem vody $\text{d}V = Sv_x \text{d}t$ $\Rightarrow$

$$\text{d}V = S\sqrt{2xg}\,\text{d}t\,.$$

V časovém intervalu $\text{d}t$ se tedy objem vody v nádobě zmenší o $\text{d}V = \pi r^2 \text{d}x$. Z rovnosti těchto elementárních objemů plyne

$$S\sqrt{2xg}\,\text{d}t = \pi r^2 \text{d}x \Rightarrow \text{d}t = \frac{\pi r^2}{S\sqrt{2g}} \frac{\text{d}x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \text{d}t = \frac{\pi r^2}{S\sqrt{2g}} x^{-\frac{1}{2}} \text{d}x\,.$$

Celkový časový interval $t$ výtoku vody z nádoby získáme určitou integrací

$$t = \frac{\pi r^2}{S\sqrt{2g}} \int_0^h x^{-\frac{1}{2}} \text{d}x = \frac{\pi r^2}{S\sqrt{2g}} \left[ 2x^{\frac{1}{2}} \right]_0^h \Rightarrow t = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}} \sqrt{h}\,.$$

Dosadíme-li za $h$ výsledek z části **a)** této úlohy, dostaneme postupně

$$t = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{Q_V^2}{2S^2 g}} \Rightarrow t = \frac{2\pi r^2 Q_V}{S^2 2g} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi r^2 Q_V}{S^2 g}}$$

**c)** Pohyb hladiny vody v nádobě při výtoku vody otvorem $S$ ve dně bude obecně **zpomalený**, neboť velikost $v_x$ výtokové rychlosti vody otvorem $S$ **klesá** v důsledku zmenšujícího se hydrostatického tlaku v úrovni dna nádoby. Posuďme nyní možnost **rovnoměrně** zpomaleného pohybu hladiny vody v nádobě. Pokud by tomu tak bylo, závisela by velikost $u$ rychlosti $\vec{u}$ pohybu hladiny na čase **lineárně** – mohli bychom ji tedy vyjádřit vztahem

$$u = u_0 - kt\,;\ k > 0\,.$$

V takovém případě by bylo možno určit **průměrnou** rychlost $u_p$ klesání hladiny v časovém intervalu $t'$ jako aritmetický průměr její **maximální** $(u_{max})$ a **minimální** $(u_{min} = 0)$ hodnoty. Maximální hodnotu $(u_{max})$ klesání hladiny bezprostředně po uzavření přítoku určíme pomocí vztahu $v = \sqrt{2hg}$ pro výtokovou rychlost kapaliny otvorem ve dně z rovnice kontinuity

$$\pi r^2 u_{max} = S\sqrt{2hg} \Rightarrow u_{max} = \frac{S\sqrt{2hg}}{\pi r^2}.$$

Průměrná rychlost $u_p$ klesání hladiny v časovém intervalu $t'$ je pak

$$u_p = \frac{u_{max} + u_{min}}{2} \Rightarrow u_p = \frac{S\sqrt{2hg}}{2\pi r^2}.$$

Časový interval $t'$ výtoku veškeré vody z nádoby pak určíme jako

$$t' = \frac{h}{u_p} \Rightarrow t' = \frac{2\pi h r^2}{S\sqrt{2hg}} \Rightarrow t' = \frac{2\pi r^2}{S}\sqrt{\frac{h^2}{2hg}} \Rightarrow t' = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{h}\,.$$

Dosadíme-li za $h$ výraz získaný v řešení části **a)**, dostaneme

$$t' = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{Q_V^2}{2S^2 g}} \Rightarrow t' = \frac{\pi r^2 Q_V}{S^2 g}.$$

Porovnáme-li nyní doby výtoku veškeré vody, získané řešením částí **b)** a **c)**, zjistíme, že $t' = t$. Tento výsledek znamená potvrzení předpokladu o tom, že hladina vody v nádobě (válcové) při výtoku otvorem ve dně koná rovnoměrně zpomalený pohyb.