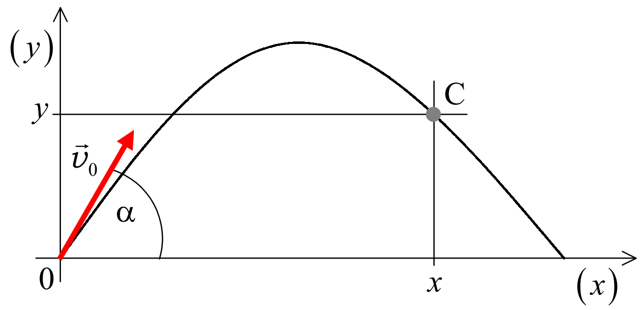
11. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

11.1 Dělo vrhá střely počáteční rychlostí $v_0 = 400\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Je nutno zasáhnout cíl, který je v horizontální vzdálenosti $x = 1000\ \mathrm{m}$ od děla a ve výši $y = 300\ \mathrm{m}$ nad ním. Jaký je minimální elevační úhel děla?

$v_0 = 400\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $x = 1000\ \mathrm{m}$; $y = 300\ \mathrm{m}$; $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $\vec{v}_{0,\min} = ?$



Střela se pohybuje šikmým vrhem a složky jejího polohového vektoru jsou

$$x = v_0 t \cos\alpha ,$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha .$$

Analytický tvar trajektorie (paraboly) získáme vyloučením času t z předchozích (parametrických) rovnic

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha \Rightarrow y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \operatorname{tg}\alpha .$$

Vyjádříme nyní funkci $\cos^2\alpha$ pomocí funkce $\operatorname{tg}\alpha$ následující úpravou

$$\cos^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

a dosadíme jej do rovnice paraboly. Dostáváme

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)x^2 + x \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow g x^2 \operatorname{tg}^2\alpha - 2 v_0^2 x \operatorname{tg}\alpha + 2 v_0^2 y + g x^2 = 0 ,$$

což je vzhledem k veličinám, které známe, kvadratická rovnice vzhledem k $\operatorname{tg}\alpha$. Její diskriminant je

$$D = 4 v_0^4 x^2 - 4 g x^2 \left(2 v_0^2 y + g x^2\right) \Rightarrow D = 4x^2\left[v_0^2\left(v_0^2 - 2gy\right) - g^2 x^2\right].$$

Menší z kořenů řešené kvadratické rovnice má hodnotu

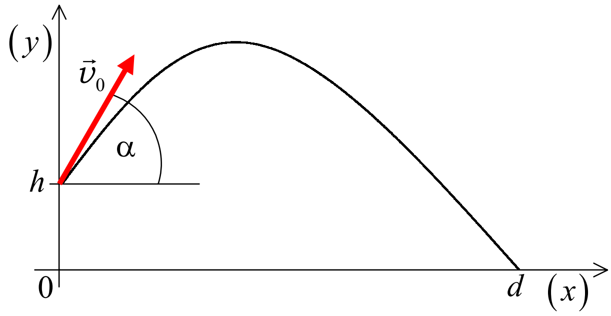
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_{\min} = \frac{2 v_0^2 x - 2x\sqrt{v_0^2\left(v_0^2 - 2gy\right) - g^2 x^2}}{2 g x^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{\min} = \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^2\left(v_0^2 - 2gy\right) - g^2 x^2}}{g x} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^2\left(v_0^2 - 2gy\right) - g^2 x^2}}{g x}}, \quad \alpha_{\min} \doteq 18{,}5^\circ .$$

11.2 Dělo se nachází na skalním útesu ve výšce h nad vodorovnou krajinou. Z děla je vystřelena střela pod elevačním úhlem α počáteční rychlostí v_0. Najděte vzdálenost d (měřenou od děla ve vodorovném směru), ve které střela dopadne.

h ; v_0 ; α ; $d = ?$



Střela se pohybuje šikmým vrhem a složky jejího polohového vektoru jsou

$$x = v_0 t \cos\alpha \,,$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha + h \,.$$

Vyloučením času t z těchto rovnic dostaneme analytickou rovnici paraboly, po níž se střela pohybuje, ve tvaru

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \operatorname{tg}\alpha + h \,.$$

Bod dopadu střely o souřadnicích $[d;0]$ musí této rovnici vyhovovat – musí tedy platit

$$-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} d^2 + d \operatorname{tg}\alpha + h = 0 \,.$$

Řešením této kvadratické rovnice, jejíž neznámou je hledaná vzdálenost d, je po nalezení diskriminantu D ve tvaru

$$D = \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{4gh}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} > 0$$

jsou kořeny

$$d_{1,2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \dfrac{4gh}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}}}{\dfrac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}} \,.$$

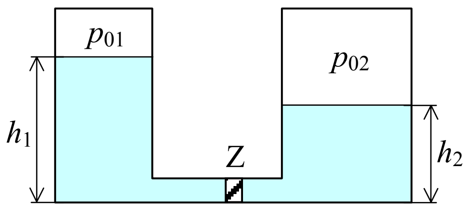
Vzhledem k tomu, že výraz pod odmocninou je při zadání úlohy větší než $\operatorname{tg}^2\alpha$, vyhovuje tomuto zadání jen hodnota

$$d = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \dfrac{4gh}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}}}{\dfrac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}} = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gh}{v_0^2}} \right) \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} =$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \left(\sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \frac{2gh\cos^2\alpha}{v_0^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{d = \frac{v_0^2}{2g} \left(\sin 2\alpha + \sqrt{\sin^2 2\alpha + \frac{8gh\cos^2\alpha}{v_0^2}} \right)}$$

11.3 Dvě kapaliny o hustotách $\rho_1 = 1\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^3}$, $\rho_2 = 1{,}8\cdot10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ jsou v rovnováze v uzavřených válcových nádobách o průřezech $S_1 = 0{,}5\ \mathrm{m^2}$, $S_2 = 0{,}3\ \mathrm{m^2}$, spojených krátkou trubicí o průřezu $S_0 = 4\cdot10^{-4}\ \mathrm{m^2}$ podle obrázku. Nad hladinou kapalin je vzduch, který má v první nádobě tlak $p_{01} = 2\cdot10^5\ \mathrm{Pa}$, ve druhé nádobě tlak $p_{02} = 1{,}5\cdot10^5\ \mathrm{Pa}$. Výška hladiny v první nádobě je $h_1 = 2\ \mathrm{m}$. Ve spojovací trubici je volně pohyblivá zátka Z, zabraňující promísení kapalin. Určete **a)** tlakovou sílu působící na zátku zleva, **b)** objem kapaliny ve druhé nádobě. $\left(g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)$



$\rho_1 = 1\cdot10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; $\rho_2 = 1{,}8\cdot10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; $S_1 = 0{,}5\ \mathrm{m^2}$; $S_2 = 0{,}3\ \mathrm{m^2}$; $S_0 = 4\cdot10^{-4}\ \mathrm{m^2}$;
$p_{01} = 2\cdot10^5\ \mathrm{Pa}$; $p_{02} = 1{,}5\cdot10^5\ \mathrm{Pa}$; $h_1 = 2\ \mathrm{m}$. $F_1,\ V_2 = ?$

Podmínkou rovnováhy kapalin v nádobách je nulová výslednice sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ působících zleva a zprava na zátku Z: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow F_1 = F_2$. Velikost F_1 tlakové síly $\vec{F}_1$ (působící na zátku zleva) je úměrná celkovému tlaku kapaliny v úrovni zátky; platí tedy

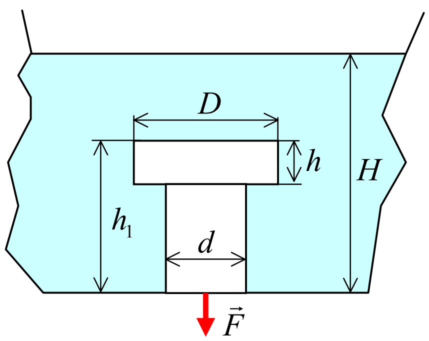
$$\boxed{F_1 = \left(p_{01} + h_1\rho_1 g\right)S_0}\ ,\quad F_1 = 88\ \mathrm{N}.$$

Z podmínky $F_1 = F_2$ dostaneme $F_2 = \left(p_{02} + h_2\rho_2 g\right)S_0 = \left(p_{01} + h_1\rho_1 g\right)S_0 \Rightarrow$

$$p_{02} + h_2\rho_2 g = p_{01} + h_1\rho_1 g \Rightarrow\ h_2 = \frac{1}{\rho_2 g}\left(p_{01} - p_{02} + h_1\rho_1 g\right);\ V_2 = h_2 S_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{V_2 = \frac{S_2}{\rho_2 g}\left(p_{01} - p_{02} + h_1\rho_1 g\right)}\ ,\quad V_2 \doteq 1{,}17\ \mathrm{m^3}$$

11.4 Na dně vodojemu stojí betonová konstrukce tvaru dvou souosých válců (viz obrázek). Určete velikost síly, kterou konstrukce působí na dno vodojemu. Hustota vody je ρ_0, hustota betonu je ρ.



h; h_1; H; d; D; ρ_0; ρ; $F = ?$

Tíha $\vec{F}_G$ konstrukce (směřující svisle **dolů**):

$$F_G = V\rho g = \left(V_1 + V_2\right)\rho g =$$

$$= \left[\pi\frac{D^2}{4}h + \pi\frac{d^2}{4}\left(h_1 - h\right)\right]\rho g \Rightarrow$$

$$F_G = \frac{\pi}{4}\left(D^2 h\rho + d^2 h_1\rho - d^2 h\rho\right)g.$$

Plošná tlaková síla $\vec{F}_1$ na **celou** horní podstavu většího válce (směřující svisle **dolů**)

$$F_1 = S_1 p_1 = \pi\frac{D^2}{4}\left(H - h_1\right)\rho_0 g \Rightarrow F_1 = \frac{\pi}{4}\left(D^2 H\rho_0 - D^2 h_1\rho_0\right)g.$$

Plošná tlaková síla $\vec{F}_2$ na (vodě přístupnou) **část** dolní podstavy většího válce (směřující svisle **nahoru**)

$$F_2 = S_2 p_2 = \left(\pi\frac{D^2}{4} - \pi\frac{d^2}{4}\right)\left[H - (h_1 - h)\right]\rho_0 g \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)\left[H - (h_1 - h)\right]\rho_0 g \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{\pi}{4}\left(D^2 H\rho_0 - D^2 h_1\rho_0 + D^2 h\rho_0 - d^2 H\rho_0 + d^2 h_1\rho_0 - d^2 h\rho_0\right)g.$$

Výslednice sil $\vec{F}_G$, $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ je síla $\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Pro velikost F síly $\vec{F}$ platí $\left(\vec{F}_G \uparrow\uparrow \vec{F}_1 \uparrow\downarrow \vec{F}_2\right)$ $F = F_G + F_1 - F_2$.

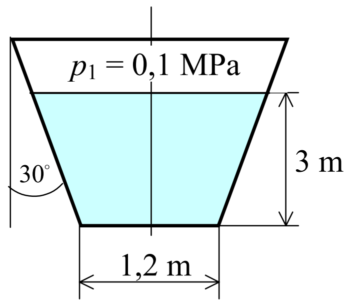
$$F = \frac{\pi}{4}\left(D^2 h\rho + d^2 h_1\rho - d^2 h\rho + D^2 H\rho_0 - D^2 h_1\rho_0 -\right.$$

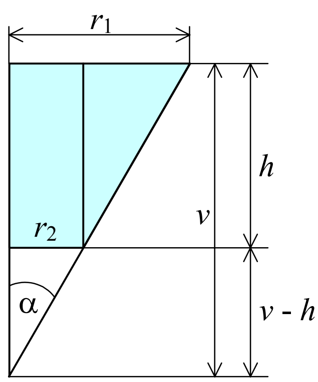
$$\left. - D^2 H\rho_0 + D^2 h_1\rho_0 - D^2 h\rho_0 + d^2 H\rho_0 - d^2 h_1\rho_0 + d^2 h\rho_0\right)g \Rightarrow$$

$$\boxed{F = \frac{\pi}{4}\left[\left(D^2 - d^2\right)\ (\rho - \rho_0)\ \ h + d^2\left(H - h_1\right)\ \rho_0 + d^2 h_1\rho\right]g}$$

11.5 V cisterně tvaru komolého kužele (viz obrázek) je voda. Určete objem V vody a její hmotnost m. Určete tlak p_2 vody u dna cisterny a tlakovou sílu F působící na její dno. Určete výslednou tlakovou sílu F_S vody působící na kuželovou stěnu cisterny.
$\left[22{,}6\ \mathrm{m^3};\ 22{,}6\cdot 10^3\ \mathrm{kg};\ 1{,}3\cdot 10^5\ \mathrm{Pa};\ 1{,}47\cdot 10^5\ \mathrm{N};\ 7{,}9\cdot 10^5\ \mathrm{N}\right]$

$p_1 = 0{,}1\ \mathrm{MPa}$; $h = 3\ \mathrm{m}$; $r_2 = 0{,}6\ \mathrm{m}$; $\alpha = 30^\circ$; $V, m, p_2, F, F_S = ?$





Objem V vody v cisterně určíme jako rozdíl objemů V_1, V_2 dvou kuželů:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 v;\ V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 (v - h);\ V = V_1 - V_2 \Rightarrow\ V = \frac{1}{3}\pi\left[r_1^2 v - r_2^2 (v - h)\right]$$

$$v = h + \frac{r_2}{\operatorname{tg}\alpha};\ r_1 = r_2 + h\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow\ V = \frac{\pi}{3}\left[\left(r_2 + h\operatorname{tg}\alpha\right)^2\left(h + r_2/\operatorname{tg}\alpha\right) - r_2^3/\operatorname{tg}\alpha\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \pi h\left(\frac{h^2}{3}\operatorname{tg}^2\alpha + h\, r_2\operatorname{tg}\alpha + r_2^2\right)},\ V = \pi\left(3 + 3\cdot 0{,}6\sqrt{3} + 3\cdot 0{,}6^2\right) \doteq 22{,}6\ \mathrm{m^3}.$$

Hmotnost vody:

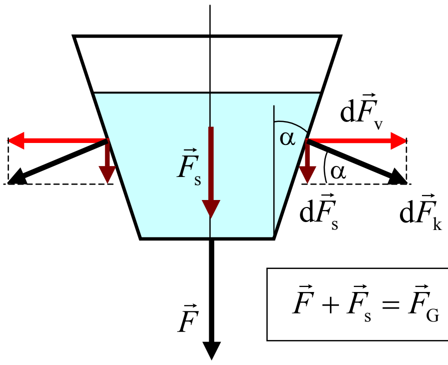
$$m = \rho V \Rightarrow \boxed{m = \pi\rho h\left(\frac{h^2}{3}\mathrm{tg}^2\,\alpha + h\,r_2\,\mathrm{tg}\,\alpha + r_2^2\right)},\ m = 22{,}6\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^3}.$$

Tlak (klidné) vody v úrovni dna cisterny:

$$\boxed{p = p_1 + h\rho g},\ p = (1+0{,}3)10^5\ \mathrm{Pa} = \ 1{,}3\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

Tlaková síla (klidné) vody na dno cisterny:

$$F = pS \Rightarrow \boxed{F = (p_1 + h\rho g)\pi r_2^2},\ F = \pi\cdot 1{,}3\cdot 0{,}6^2\cdot 10^5\ \mathrm{N} = 1{,}47\cdot 10^5\ \mathrm{N}.$$



$$\boxed{\vec{F} + \vec{F}_\mathrm{s} = \vec{F}_\mathrm{G}}$$

Tlakovou sílu $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{k}$ působící kolmo na **element** $\mathrm{d}S$ (vnitřního) povrchu kuželové stěny lze rozložit na **vodorovnou** složku $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{v}$ a na **svislou** složku $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{s}$.

Výslednice **vodorovných** složek $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{v}$ je **nulová**.

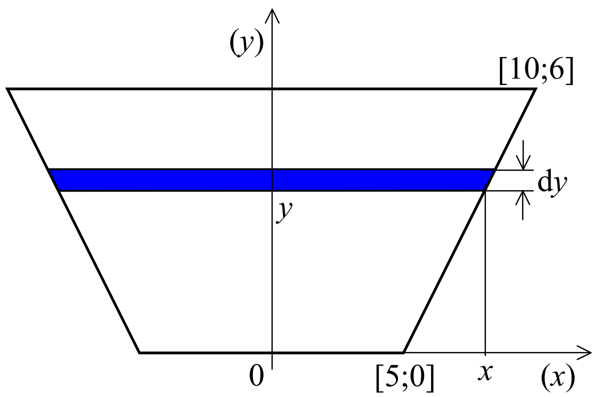
Velikost F_s výslednice $\vec{F}_\mathrm{s}$ **svislých** složek můžeme určit jako rozdíl velikosti tíhy F_g vody a velikostí F tlakové síly $\vec{F}$, kterou voda působí na dno cisterny:

$$F_\mathrm{s} = F_g - F \Rightarrow \boxed{F_\mathrm{s} = mg - F},\ F_\mathrm{s} = (22{,}6 - 14{,}7)10^4\ \mathrm{N} = 7{,}9\cdot 10^4\ \mathrm{N}.$$

Velikost F_k celkové tlakové síly, kterou působí voda kolmo na **šikmou** stěnu cisterny, je

$$\boxed{F_\mathrm{k} = F_\mathrm{s}/\sin\alpha}$$

11.6 Přehradní zeď má tvar rovnoramenného lichoběžníka s horní základnou $20\ \mathrm{m}$, dolní základnou $10\ \mathrm{m}$ a výškou $6\ \mathrm{m}$. Vypočtěte velikost tlakové síly, kterou na ni působí voda.



$z_1 = 20\ \mathrm{m}$; $z_2 = 10\ \mathrm{m}$; $h = 6\ \mathrm{m}$; $F = ?$

V hloubce $h - y$ pod volnou hladinou vody je hydrostatický tlak $p = (h-y)\rho g$.

Vyberme element $\mathrm{d}S$ přehradní zdi, jehož **všechny** body jsou v místě **stejného** hydrostatického tlaku (viz. obr.). Celý element $\mathrm{d}S$ je v (náhodně zvolené) hloubce $h - y$ pod volnou hladinou vody a je možno jej považovat za **obdélník**, jehož strany jsou $\mathrm{d}y$ a $2x$ $\Rightarrow$ $\mathrm{d}S = 2x\,\mathrm{d}y$. Na element $\mathrm{d}S$ působí **elementární** tlaková síla $\mathrm{d}\vec{F}$ o velikosti

$$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}S = \rho g(h-y)\,\mathrm{d}S \Rightarrow\ \mathrm{d}F = 2\rho g(h-y)\,x\,\mathrm{d}y\,.$$

Vyjádřeme nyní závislost x (poloviny délky elementu $\mathrm{d}S$) na souřadnici y. Napišme nejdříve rovnici přímky procházející **pravými** vrcholy lichoběžníka – body o souřadnicích $[5;0]$, $[10;6]$. Obecný tvar rovnice přímky procházející dvěma různými body o známých souřadnicích je

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ a odtud } y = \frac{6}{5}(x-5) \Rightarrow x = \frac{5}{6}y + 5 .$$

Dosadíme-li toto vyjádření závislosti souřadnice x pravého okraje zdi na y do vyjádření velikosti $\mathrm{d}F$ elementární síly a použijeme-li zadané hodnoty $h = 6$ dostaneme

$$\mathrm{d}F = 2\rho g(6-y)\left(\frac{5}{6}y + 5\right)\mathrm{d}y \Rightarrow \mathrm{d}F = \frac{5}{3}\rho g\left(36 - y^2\right)\mathrm{d}y .$$

Celkovou tlakovou sílu vody na zeď vypočteme určitou integrací:

$$F = \frac{5}{3}\rho g\int_0^6\left(36-y^2\right)\mathrm{d}y \Rightarrow F = \frac{5}{3}\rho g\left\{\left[36y\right]_0^6 - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^6\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{F = 2{,}4\cdot 10^6\ \mathrm{N} = 2{,}4\ \mathrm{MN}}$$

Určeme nyní celkovou tlakovou sílu vody v případě, že bychom přehradní zeď „otočili“ tak, že by stála na své **větší** základně. Její **pravé** vrcholy by pak měly souřadnice $[10;0]$ a $[5;6]$; rovnice přímky procházející těmito body by byla

$$y = -\frac{6}{5}x + 12 \Rightarrow x = -\frac{5}{6}y + 10 .$$

Pro velikost $\mathrm{d}F$ elementární tlakové síly působící na plošný element $\mathrm{d}S = 2x\,\mathrm{d}y$ povrchu zdi bude nyní platit

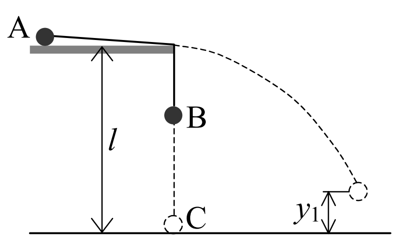
$$\mathrm{d}F = 2\rho g(6-y)\left(-\frac{5}{6}y + 10\right)\mathrm{d}y \Rightarrow \mathrm{d}F = 2\rho g\left(\frac{5}{6}y^2 - 15y + 60\right)\mathrm{d}y .$$

Celková tlaková síla vody působící na přehradní zeď je pak

$$F = 2\rho g\int_0^6\left(\frac{5}{6}y^2 - 15y + 60\right)\mathrm{d}y \Rightarrow F = 2\rho g\left[\frac{5}{18}y^3 - \frac{15}{2}y^2 + 60y\right]_0^6 \Rightarrow$$

$$\boxed{F = 3\cdot 10^6\ \mathrm{N} = 3\ \mathrm{MN}}$$

11.7 Dvě stejné kuličky jsou spojeny neroztažitelnou a dokonale ohebnou nití délky l zanedbatelné hmotnosti. První z nich držíme na desce stolu, jehož výška nad podlahou je l, druhá visí přes hranu stolu a její výška nad podlahou je $2l/3$. Po uvolnění začne první kulička klouzat bez tření po desce stolu a v okamžiku, kdy druhá kulička dosáhne podlahy, se oddělí od stolní desky. Určete výšku y_0 druhé kuličky nad podlahou, v níž dojde k opětnému napnutí niti.



Rychlost kuličky A v okamžiku $t = 0$ jejího oddělení od stolní desky určíme ze zákona zachování mechanické energie

$$2\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{2}{3}mgl \Rightarrow \; v_0 = \sqrt{\frac{2gl}{3}}\,.$$

Ve velmi krátkém následném časovém intervalu se napnutí niti poruší, neboť setrvačná odstředivá síla

$$F_o = \frac{mv_0^2}{l} = \frac{2}{3}mg\,,$$

působící na kuličku A v okamžiku $t = 0$, je menší než tíha mg kuličky.

Od okamžiku $t = 0$ se kulička A bude pohybovat vodorovným vrhem; složky jejího polohového vektoru v soustavě s počátkem v bodě C jsou

$$x = v_0 t\,;\; y = l - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

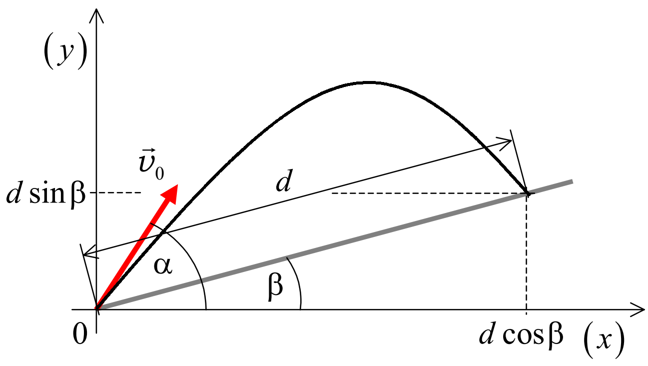
Opětné napnutí niti nastane v okamžiku t_1 , kdy

$$x_1^2 + y_1^2 = l^2 \Rightarrow v_0^2 t_1^2 + l^2 - lgt_1^2 + \frac{1}{4}g^2 t_1^4 = l^2 \Rightarrow \; t_1 = \sqrt{\frac{4l}{3g}} \;\Rightarrow$$

$$y_1 = l - \frac{1}{2}gt_1^2 = l - \frac{1}{2}g\frac{4l}{3g} \Rightarrow \; \boxed{y_1 = \frac{l}{3}}$$

11.8 Dělo vrhá střely počáteční rychlostí v_0. Najděte maximální vzdálenost, do které může dělo dostřelit na šikmé rovině svírající s vodorovným směrem úhel β. Jaký musí být elevační úhel?

$$v_0\,;\; \beta\,;\; d_{max}, \alpha = ?$$



Střela se pohybuje šikmým vrhem a složky jejího polohového vektoru jsou

$$x = v_0 t\cos\alpha\,,$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + h\,.$$

Vyloučením času t z těchto rovnic dostaneme analytickou rovnici paraboly, po níž se střela pohybuje, ve tvaru

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{g}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\right)x^2 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Dosadíme-li to této rovnice souřadnice místa dopadu střely, dostaneme

$$d\sin\beta = -\frac{gd^2\cos^2\beta}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\right) + d\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow d = \frac{2v_0^2\left(\mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta - \sin\beta\right)}{g\cos^2\beta\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\right)} \Rightarrow$$

$$d = \frac{2v_0^2\left(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta\right)}{g\cos\beta\left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\right)}\,.$$

Další řešení je hledáním lokálního maxima funkce $d = d(\alpha)$. Nutnou podmínkou extrému je nulovost první derivace této funkce podle proměnné α a tedy

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t} = \frac{2v_0^2}{g\cos\beta}\,\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)-\left(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta\right)2\,\mathrm{tg}\,\alpha\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha-2\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta\right)=0 \Rightarrow \mathrm{tg}^2\alpha-2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta-1=0.$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je $D = 4\,\mathrm{tg}^2\beta + 4d$, takže pro kořeny rovnice dostáváme $\mathrm{tg}\,\alpha_{1,2} = \mathrm{tg}\,\beta \pm \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}$. Druhý kořen nevyhovuje zadání úlohy (elevační úhel šikmého vrhu by měl být ostrý). Dostáváme tedy

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta + \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta} \Rightarrow \boxed{\alpha = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\beta+\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}\right)}$$

Tento výsledek lze upravit také následujícím způsobem.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta + \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta} = \mathrm{tg}\,\beta + \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1+\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{2+2\sin\beta}{2\cos\beta} =$$

$$= \frac{1+\cos\beta+\sin\beta+\sin\beta+1-\cos\beta}{1+\cos\beta-1+\cos\beta} =$$

$$= \frac{1+\cos\beta+\sqrt{1-\cos^2\beta}+\sqrt{1-\cos^2\beta}+1-\cos\beta}{\left(\sqrt{1+\cos\beta}-\sqrt{1-\cos\beta}\right)\left(\sqrt{1+\cos\beta}+\sqrt{1-\cos\beta}\right)} =$$

$$= \frac{1+\cos\beta+2\sqrt{1-\cos^2\beta}+1-\cos\beta}{\left(\sqrt{1+\cos\beta}-\sqrt{1-\cos\beta}\right)\left(\sqrt{1+\cos\beta}+\sqrt{1-\cos\beta}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+\cos\beta}+\sqrt{1-\cos\beta}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\cos\beta}-\sqrt{1-\cos\beta}\right)\left(\sqrt{1+\cos\beta}+\sqrt{1-\cos\beta}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\cos\beta}+\sqrt{1-\cos\beta}}{\sqrt{1+\cos\beta}-\sqrt{1-\cos\beta}} = \frac{1+\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}}{1-\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}} = \frac{1+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}$$

11.9 Těleso je vrženo tak, že dopadne na vodorovnou rovinu procházející místem vrhu ve vzdálenosti d a nejvyšší bod dráhy je ve výšce h na touto rovinou. V jaké maximální vzdálenosti by mohlo těleso dopadnout, kdyby bylo vrženo pod vhodným elevačním úhlem toutéž počáteční rychlostí?

$$d\,;\ h\,;\ d_{\max} = ?$$

Střela se pohybuje šikmým vrhem a složky jejího polohového vektoru jsou

$$x = v_0 t \cos\alpha\,,\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha\,.$$

Okamžik t_d dopadu šikmého vrhu na vodorovnou rovinu procházející místem vrhu určíme z podmínky

$$y = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}gt + v_0 \sin\alpha\right)t = 0 \Rightarrow\ -\frac{1}{2}gt_\mathrm{d} + v_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow\ t_\mathrm{d} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu času do vyjádření **první** složky polohového vektoru částice, dostaneme délku d vrhu

$$x = d = v_0 \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\cos\alpha \Rightarrow\ d = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Okamžik t_h dosažení maximální výšky h vrhu určíme z podmínky

$$v_y = 0 \Rightarrow v_0 \sin\alpha - gt_\mathrm{h} = 0 \Rightarrow t_\mathrm{h} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu času do vyjádření **druhé** složky polohového vektoru částice, dostaneme výšku h vrhu

$$y = h = v_0 \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\sin\alpha - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} \Rightarrow\ h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}.$$

Použijeme-li z tohoto vztahu k vyjádření $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ jako

$$\sin\alpha = \frac{1}{v_0}\sqrt{2gh}\ ,\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow\quad \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{2gh}{v_0^2}}$$

a dosadíme-li tato vyjádření do vztahu pro délku d vrhu, dostaneme

$$d = \frac{2v_0^2}{g}\frac{1}{v_0}\sqrt{2gh}\sqrt{1-\frac{2gh}{v_0^2}} \Rightarrow d^2 = \frac{8v_0^2 h}{g} - 16h^2 \Rightarrow\ v_0^2 = g\left(\frac{d^2}{8h} + 2h\right).$$

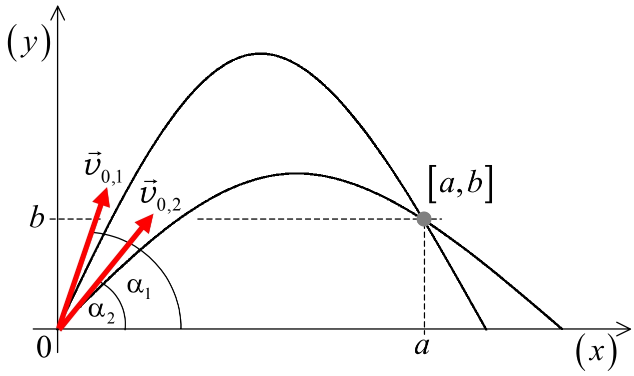
Derivujeme-li vztah pro délku d vrhu podle α a položíme-li tuto derivaci rovnu nule, dostaneme nutnou podmínku pro určení elevačního úhlu, při němž je při dané počáteční rychlosti délka d vrhu **maximální**. Platí tedy

$$d = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \Rightarrow d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g};$$

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2v_0^2 \cos 2\alpha}{g} = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 45^\circ\ \Rightarrow\ d_\mathrm{max} = \frac{v_0^2}{g} \Rightarrow\ \boxed{d_\mathrm{max} = \frac{d^2}{8h} + 2h}$$

11.10 Dělo vystřelí dvě střely toutéž počáteční rychlostí v_0. První střela je vystřelena pod elevačním úhlem α_1, druhá pod menším elevačním úhlem α_2. Jak velký musí být časový interval Δt mezi oběma výstřely, aby se střely ještě před dopadem srazily?

$$v_{1,0} = v_{2,0} = v_0\,;\ \alpha_1\,;\ \alpha_2\,;\ \alpha_2 < \alpha_1\,;\ \Delta t = ?$$



Rovnice trajektorie první střely je

$$y_1 = -\frac{g}{2v_0^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_1\right)x_1^2 + x_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 \,.$$

Rovnice trajektorie druhé střely je

$$y_2 = -\frac{g}{2v_0^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_2\right)x_2^2 + x_2\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 \,.$$

Souřadnice a,b bodu, v němž dojde ke srážce střel, musí vyhovovat oběma rovnicím, musí tedy platit

$$-\frac{g}{2v_0^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_1\right)a^2 + a\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 = -\frac{g}{2v_0^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_2\right)a^2 + a\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 - \mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{ag}{2v_0^2}\left[\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha_1\right)-\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha_2\right)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{ag}{2v_0^2}\left(\mathrm{tg}^2\,\alpha_1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha_2\right) = \mathrm{tg}\,\alpha_1 - \mathrm{tg}\,\alpha_2 \Rightarrow \quad a = \frac{2v_0^2}{g\left(\mathrm{tg}\,\alpha_1 + \mathrm{tg}\,\alpha_2\right)}.$$

Pro souřadnici a kromě toho platí

$$a = v_0 t_1 \cos\alpha_1 \wedge a = v_0 t_2 \cos\alpha_2 ;\, t_1 - t_2 = \Delta t \Rightarrow t_1 = \frac{a}{v_0\cos\alpha_1},\, t_2 = \frac{a}{v_0\cos\alpha_2} \Rightarrow$$

$$t_1 - t_2 = \frac{a}{v_0}\left(\frac{1}{\cos\alpha_1} - \frac{1}{\cos\alpha_2}\right) \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{v_0}\left(\frac{1}{\cos\alpha_1} - \frac{1}{\cos\alpha_2}\right)\frac{2v_0^2}{g\left(\mathrm{tg}\,\alpha_1 + \mathrm{tg}\,\alpha_2\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{2v_0}{g}\,\frac{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1}{\sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}}$$