10. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

10.1 Oběžná doba HALLEYOVY komety je 76 let. Najděte hodnotu velké poloosy její trajektorie.

$$T_{\mathrm{H}} = 76\ \mathrm{r}\,;\ T_{\mathrm{Z}} = 1\ \mathrm{r}\,;\ a_{\mathrm{Z}} = 1\ \mathrm{a.j.}\,;\ a_{\mathrm{H}} = ?$$

3.KEPLERŮV zákon:

$$\frac{T_{\mathrm{Z}}^2}{a_{\mathrm{Z}}^3} = \frac{T_{\mathrm{H}}^2}{a_{\mathrm{H}}^3} \Rightarrow a_{\mathrm{H}}^3 = \left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{Z}}}\right)^2 a_{\mathrm{Z}}^3 \Rightarrow \boxed{a_{\mathrm{H}} = a_{\mathrm{Z}} \sqrt[3]{\left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{Z}}}\right)^2}}\,,\ a_{\mathrm{H}} = 1\ \mathrm{a.j.} \cdot \sqrt[3]{76^2} \doteq 17{,}9\ \mathrm{a.j.}$$

9.2 Pro hmotnost a poloměr Země $(M_{\mathrm{Z}}, R_{\mathrm{Z}})$ a Měsíce $(M_{\mathrm{M}}, R_{\mathrm{M}})$ platí: $M_{\mathrm{Z}} \doteq 81 M_{\mathrm{M}}$, $R_{\mathrm{M}} \doteq \frac{3}{11} R_{\mathrm{Z}}$. Určete gravitační zrychlení na povrchu Měsíce.

$$M_{\mathrm{Z}} \doteq 81\, M_{\mathrm{M}}\,;\ R_{\mathrm{M}} \doteq \tfrac{3}{11} R_{\mathrm{Z}}\,;\ a_{\mathrm{g}} = ?.$$

$$a_{\mathrm{g,M}} = G\frac{M_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{M}}^2} = G\frac{M_{\mathrm{Z}}}{81\frac{9}{121}R_{\mathrm{Z}}^2} = \frac{121}{9\cdot 81}G\frac{M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}}^2} \Rightarrow \boxed{a_{\mathrm{g,M}} \doteq 0{,}17g}$$

10.3 Vzdálenost středů Země a Měsíce je přibližně $3{,}84 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$. Hmotnost Země je přibližně $6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$. Oběžná doba Měsíce kolem Země je $27{,}5\ \mathrm{d} = 2{,}36 \cdot 10^6\ \mathrm{s}$. Ověřte, zda tyto parametry potvrzují pohyb Měsíce po kružnicové trajektorii kolem Země.

$$r_{\mathrm{ZM}} = 3{,}84\cdot 10^8\ \mathrm{m}; M_{\mathrm{Z}} = 6\cdot 10^{24}\ \mathrm{m}; T_{\mathrm{M}} = 2{,}36\cdot 10^6\ \mathrm{s}\,.$$

Podmínkou pohybu Měsíce po **kružnici** kolem Země je jeho **kruhová** rychlost v dané vzdálenosti od Země. Touto podmínkou je rovnost velikostí odstředivého setrvačného zrychlení Měsíce a intenzity zemského gravitačního pole (v tomtéž bodě prostoru): $a_{\mathrm{o,M}} = a_{\mathrm{g,Z}}$.

Odstředivé zrychlení Měsíce

$$a_{\mathrm{o,M}} = a_{\mathrm{g,Z}} = \frac{v^2}{r_{\mathrm{ZM}}} = \left(\frac{2\pi r}{T_{\mathrm{M}}}\right)^2 \frac{1}{r_{\mathrm{ZM}}} \Rightarrow a_{\mathrm{o,M}} \doteq 2{,}7\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Intenzita zemského gravitačního pole

$$a_{\mathrm{g,Z}} = G\frac{M_{\mathrm{Z}}}{r_{\mathrm{ZM}}^2} \Rightarrow a_{\mathrm{g,Z}} \doteq 2{,}7\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N\cdot kg^{-1}} = 2{,}7\cdot 10^{-3}\mathrm{m\cdot s^{-2}} \Rightarrow \boxed{a_{\mathrm{o,M}} = a_{\mathrm{g,Z}}}$$

10.4 Určete přibližnou hmotnost Slunce z poloměru trajektorie Země – přibližně kružnice o poloměru 150 mil. km $\left[1{,}5\cdot 10^{11}\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{a.j.}\ (\mathrm{astr.jednotka})\right]$. Oběžná doba Země kolem Slunce je přibližně 365 dnů.

$$R_{\mathrm{ZS}} = 150\,000\,000\ \mathrm{km}; T_{\mathrm{Z}} = 3{,}153\,6\cdot 10^7\ \mathrm{s}.\ M_{\mathrm{S}} = ?$$

$$\frac{v_{\mathrm{Z}}^2}{R_{\mathrm{ZS}}} = G\frac{M_{\mathrm{S}}}{R_{\mathrm{ZS}}^2} \Rightarrow M_{\mathrm{S}} = \frac{R_{\mathrm{ZS}}}{G}v_{\mathrm{Z}}^2 = \frac{R_{\mathrm{ZS}}}{G}\frac{4\pi^2 R_{\mathrm{ZS}}^2}{T_{\mathrm{Z}}^2} \Rightarrow \boxed{M_{\mathrm{S}} = \frac{R_{\mathrm{ZS}}^3}{G}\left(\frac{2\pi}{T_{\mathrm{Z}}}\right)^2}\,,\ M_{\mathrm{S}} \doteq 2\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}.$$

10.5 Určete poloměr $R_Z + h$ kružnice ležící v rovině zemského rovníku, po níž se kolem Země pohybuje tzv. **geostacionární** družice. Jde o družici, která obíhá Zemi s periodou jeden den $(T = 1\,\mathrm{d})$. Její pohyb je synchronní s otáčením Země – družice tedy „visí“ nad určitým bodem zemského rovníku a je používána zejména ke komunikačním účelům.

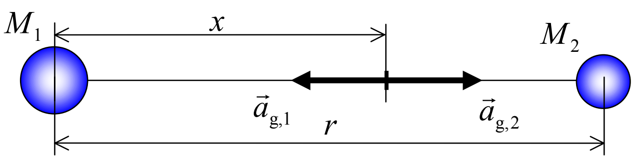
Poloměr kružnice, která je trajektorií geostacionární družice, určíme z podmínek

$$v_k(h) = \sqrt{g\frac{R_Z^2}{R_Z + h}} \wedge v_k(h) = \frac{2\pi(R_Z + h)}{T} \Rightarrow (R_Z + h)^3 = \frac{R_Z^2 g T^2}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{R_Z + h = \sqrt[3]{\frac{R_Z^2\, g\, T^2}{4\pi^2}}}\ ;\ R_Z + h \doteq 40\,000\ \mathrm{km}$$

10.6 Vzdálenost středů dvou homogenních koulí o hmotnostech M_1, M_2, $(M_1 > M_2)$ je r. Ve kterém bodě na spojnici jejich středů mají intenzity jejich gravitačních polí stejnou velikost? Určete tuto vzdálenost pro Zemi a Měsíc víte-li, že střed Měsíce je od středu Země vzdálen $3{,}84 \cdot 10^8\ \mathrm{m} \approx 60 R_Z$, $M_Z \doteq 81\, M_M$.
$\left[r\sqrt{M_1} \big/ \left(\sqrt{M_1} - \sqrt{M_2}\right);\ \text{asi } 54 R_Z \right]$

M_1; M_2; r; $r_{ZM} \doteq 60 R_Z$; $M_Z \doteq 81 M_M$; $x = ?$



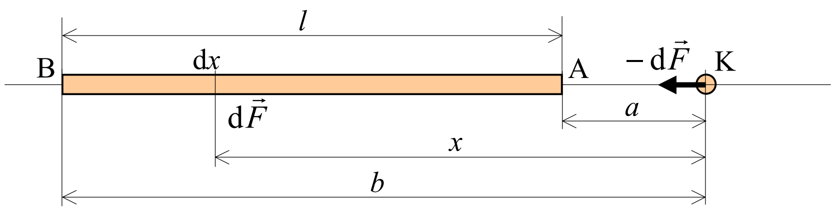
$$a_{g,1} = G\frac{M_1}{x^2},\quad a_{g,1} = G\frac{M_2}{(r - x)^2};$$

$$a_{g,1} = a_{g,2} \Rightarrow G\frac{M_1}{x^2} = G\frac{M_2}{(r - x)^2} \Rightarrow M_1 (r - x)^2 = M_2 x^2 \Rightarrow$$

$$(r - x)\sqrt{M_1} = x\sqrt{M_2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{r\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1} - \sqrt{M_2}}},\ (x \doteq 54 R_Z)$$

10.7 Kulička hmotnosti m leží ve vzdálenosti b od vzdálenějšího a ve vzdálenosti a od bližšího konce tenké homogenní tyče AB délky l a hmotnosti M. Střed kuličky leží na prodloužené ose tyče. Určete velikost síly gravitačního působení obou těles.

$m; a; b; l; M$. $F = ?$



Tyč rozdělíme na nekonečně malé elementy o délce $\mathrm{d}x$ a hmotnosti $\mathrm{d}M = \frac{M}{l}\mathrm{d}x$. Každý z těchto elementů přispívá ke gravitačnímu přitahování celé tyče a kuličky silou $\mathrm{d}\vec{F}$. Všechny tyto příspěvky sečteme určitou integrací.

$$\mathrm{d}F = G\frac{m\,\mathrm{d}M}{x^2} = G\frac{m}{x^2}\frac{M}{l}\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}F = G\frac{mM}{l}\frac{\mathrm{d}x}{x^2};$$

$$F = \int_{(AB)} \mathrm{d}F = G\frac{mM}{l}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = G\frac{mM}{l}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b \Rightarrow F = G\frac{mM}{l}\frac{b-a}{ab} = G\frac{mM}{l}\frac{l}{ab} \Rightarrow$$

$$\boxed{F = G\frac{mM}{ab}}$$

10.8 Kámen byl vržen svisle vzhůru. Při pohybu vzhůru prolétl místem o výšce h v okamžiku t_1 a při pohybu dolů minul stejné místo v okamžiku t_2. Dokažte, že $2h = gt_1t_2$ a že počáteční rychlost vrhu je $v_0 = g(t_1+t_2)/2$.

$$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2;\ v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = h \Rightarrow gt^2 - 2v_0t + 2h = 0.\quad D = 4v_0^2 - 8gh \Rightarrow$$

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{v_0^2 - 2gh} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{\left(v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}\right)\left(v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2ghv_0}\right)}{g} = \frac{v_0^2 - v_0^2 + 2gh}{g} \Rightarrow \boxed{2h = g\,t_1t_2}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{g}\left[v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh} + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}\right] \Rightarrow \boxed{v_0 = g(t_1+t_2)/2}$$

10.9 Z výšky h_1 nad zemí bylo volně puštěno těleso. V tomtéž okamžiku bylo druhé těleso, nacházející se ve výše $h_2 < h_1$,vrženo svisle vzhůru rychlostí v_0. Na zem dopadla obě tělesa současně. Určete **a)** dobu pohybu t_D; **b)** velikost rychlosti v_0. Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $h_1 = 20\ \mathrm{m}$, $h_2 = 15\ \mathrm{m}$, $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Odpor prostředí zanedbejte.

$h_1 = 20\ \mathrm{m};\ h_2 = 15\ \mathrm{m};\ t_\mathrm{D}, v_0 = ?$

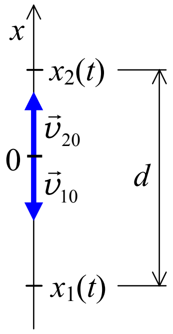
První těleso: $y_1(t_\mathrm{D}) = h_1 - \frac{1}{2}gt_\mathrm{D}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{t_\mathrm{D} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}}$, $t_\mathrm{D} = 2\ \mathrm{s}$.

Druhé těleso: $y_2(t_\mathrm{D}) = h_2 + v_0t_\mathrm{D} - \frac{1}{2}gt_\mathrm{D}^2 = 0 \Rightarrow$

$$v_0 = \frac{1}{2}gt_\mathrm{D} - \frac{h_2}{t_\mathrm{D}} = \frac{1}{2}g\sqrt{\frac{2h_1}{g}} - h_2\sqrt{\frac{g}{2h_1}} = h_1\sqrt{\frac{g}{2h_1}} - h_2\sqrt{\frac{g}{2h_1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_0 = (h_1 - h_2)\sqrt{\frac{g}{2h_1}}},\ v_0 = 2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

10.10 Z jisté výšky byla současně vržena dvě tělesa stejnou počáteční rychlostí v_0; jedno svisle dolů, druhé svisle vzhůru. Jak závisí vzdálenost d obou těles na čase?



$$v_0;\ g;\ d = d(t) = ?$$

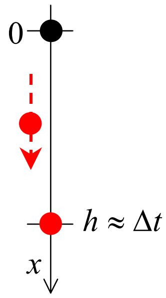
$$\vec{v}_{10} = -\vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v}_{10}(-v_0,0,0);\ \vec{v}_{20} = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v}_{20}(v_0,0,0).$$

$$x_1(t) = -v_0 t - \frac{1}{2}gt^2;\ x_2(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2;$$

$$d(t) = x_2(t) - x_1(t) \Rightarrow \boxed{d(t) = 2v_0 t}$$

10.11 Dvě částice (hmotné body) volně padají z téhož místa tak, že druhá částice začne padat tehdy, když první již urazila dráhu h $(a = g \doteq 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})$. Jaká je vzdálenost d částic v okamžiku, kdy první částice urazila dráhu $x > h$? Řešte obecně a pak i číselně pro hodnoty $h = 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $x = 256\,\mathrm{m}$.

$$h = 1\cdot 10^{-6}\mathrm{m};\ x = 256\ \mathrm{m};\ d = ?$$



$$x_1(0) = h,\ x_1(t) = \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 \ \Rightarrow\ \Delta t = \sqrt{2h/g};$$

$$x_2(0) = 0,\ x_2(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Pro $t > 0$ je $x > h$ a tedy

$$x_1(t) = \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g\left(t + \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = x > h \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}g\left(t + \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = x \Rightarrow\ t + \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2x}{g}}\ \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2l}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2.$$

$$d = x - x_2(t) = x - \frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2x}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = x - \frac{1}{2}g\left(\frac{2x}{g} - 2\frac{2}{g}\sqrt{hx} + \frac{2h}{g}\right) =$$

$$= x - x + 2\sqrt{hx} + h \Rightarrow \boxed{d = 2\sqrt{hx} - h},\ d \doteq\ 3{,}2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}.$$

10.12 První těleso bylo vrženo svisle vzhůru rychlostí $v_0 = 4{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Současně je z výšky, které toto těleso dosáhne, vrženo svislé dolů stejnou počáteční rychlostí druhé těleso. Určete okamžik setkání obou těles, jeho polohu a rychlosti obou těles v okamžiku setkání.

$$v_0 =\ 4{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}};\ g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.\ t_s, h, v_1, v_2 = ?$$

Předpokládejme, že první těleso bylo vrženo svisle vzhůru z počátku souřadnicové soustavy počáteční rychlostí $\vec{v}_{10}(v_0;0;0)$. Pak pro jeho pohyb platí

$$x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 ; v_1 = v_0 - g t .$$

Výšku h_1 jeho výstupu určíme z podmínky nulové okamžité rychlosti

$$v_1(t) = v_0 - g t = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g} ;\ h_1 = x_1(t) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 \Rightarrow h_1 = \frac{v_0^2}{2g} .$$

Počáteční poloha druhého tělesa vrženého počáteční rychlostí $\vec{v}_{20}(-v_0 ; 0 ; 0)$ je tedy $x_2(0) = h_1 = v_0^2/(2g)$ a souřadnici jeho polohy v okamžiku t proto můžeme určit ze vztahu

$$x_2(t) = -v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_2(0) \Rightarrow x_2(t) = -v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{v_0^2}{2g} ;\ v_2(t) = -v_0 - g t .$$

Okamžik t_s setkání obou těles:

$$x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = -v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0}{4g}} ,\ t_s = 0{,}125 \text{ s} .$$

Místo h setkání:

$$h = x_1(t_s) = x_2(t_s) \Rightarrow h = x_1(t_s) = v_0 \frac{v_0}{4g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{4g} \right)^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{7 v_0^2}{32 g}} ,\ h = 0{,}35 \text{ m} .$$

Velikost $v_1(t_s)$ rychlosti prvního tělesa v okamžiku setkání:

$$v_1(t_s) = v_0 - g \frac{v_0}{4g} \Rightarrow \boxed{v_1(t_s) = \frac{3 v_0}{4}} ,\ v_1(t_s) \doteq 3{,}68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Velikost $v_2(t_s)$ rychlosti **druhého** tělesa v okamžiku setkání:

$$v_2(t_s) = -v_0 - g \frac{v_0}{4g} \Rightarrow \boxed{v_2(t_s) = \frac{5 v_0}{4}}$$