9. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

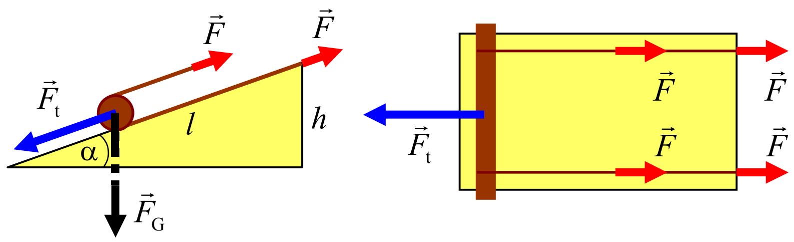
9.1 Setrvačník $\left(I_0 = 50\ \mathrm{kg\cdot m^2}\right)$ se roztáčí z klidu. Za jakou dobu dosáhne frekvence $480\ \mathrm{min^{-1}}$, působí-li na něj moment síly $300\ \mathrm{N\cdot m}$ vzhledem k ose procházející jeho těžištěm?

$$J_0 = 50\ \mathrm{kg\cdot m^2};\ f(0) = 0;\ f(t) = 480\ \mathrm{min^{-1}} = 8\ \mathrm{s^{-1}};\ M_0 = 300\ \mathrm{N\cdot m};\ t = ?$$

$$J_0\varepsilon = M_0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{M_0}{J_0},\ \omega = 2\pi f = \varepsilon t \Rightarrow 2\pi f = \frac{M_0}{J_0} t \Rightarrow \boxed{t = 2\pi \frac{J_0}{M_0} f}$$

9.2 Těžký kmen je zdvihán po nakloněné rovině pomocí dvou lan upevněných k hornímu konci nakloněné roviny. Hmotnost (M) kmene je $400\ \mathrm{kg}$, výška (h) nakloněné roviny je $1\ \mathrm{m}$ a její délka (l) je $2\ \mathrm{m}$. Jakou silou je nutno táhnout za každé z lan?

$$M;\ h;\ l;\ g;\ F = ?$$



Úloha je analogická použití volné kladky. Podmínkou rovnováhy kmene (a tím i jeho rovnoměrné zvedání po nakloněné rovině) je nulová výslednice sil působících na kmen

$$\vec{F}_\mathrm{t} + 4\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F_\mathrm{t} - 4F = 0 \Rightarrow F = \frac{F_\mathrm{t}}{4} = \frac{Mg\sin\alpha}{4};\ \sin\alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow \boxed{F = \frac{Mgh}{4l}}$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít i srovnáním práce W vykonané **dvěma** silami $\vec{F}$ po dráze $2l$ s přírůstkem potenciální energie ΔE_p kmene při zvednutí jeho těžiště o výšku h. Platí tedy

$$W = \Delta E_\mathrm{p} \Rightarrow 2F2l = Mgh \Rightarrow \boxed{F = \frac{Mgh}{4l}}$$

9.3 Plný homogenní míč hmotnosti $2\ \mathrm{kg}$ a poloměru $20\ \mathrm{cm}$ se pohybuje rychlostí $8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete jeho (okamžitou) kinetickou energii. Na jaké dráze se zastaví, je-li rameno valivého odporu $2{,}5\ \mathrm{cm}$?

$$m = 2\ \mathrm{kg};\ r = 20\ \mathrm{cm};\ \upsilon = 8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}};\ \xi = 2{,}5\ \mathrm{cm}\quad E_\mathrm{k}, s = ?$$

Míč koná posuvný pohyb rychlostí υ a současně se otáčí kolem osy o procházející těžištěm; proto

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k,pos} + E_\mathrm{k,rot} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2 .$$

$$J_0 = \frac{2}{5} m r^2 \;;\; \upsilon = \omega r \Rightarrow \; E_k = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m r^2 \frac{\upsilon^2}{r^2} \Rightarrow \boxed{E_k = \frac{7}{10} m\upsilon^2}$$

$$F_v s = E_k \Rightarrow \xi \frac{mg}{r} s = \frac{7}{10} m\upsilon^2 \Rightarrow \boxed{s = \frac{7\upsilon^2 r}{10\,\xi g}}$$

9.4 Kulička o průměru $3\,\text{cm}$ valící se po podlaze se zastaví za dobu $2\,\text{s}$ na dráze $1{,}4\,\text{m}$. Určete rameno valivého odporu mezi kuličkou a podlahou.

$$d = 3\text{ cm};\; t = 2\text{ s};\; s = 1{,}4\text{ m};\; \xi = \;?$$

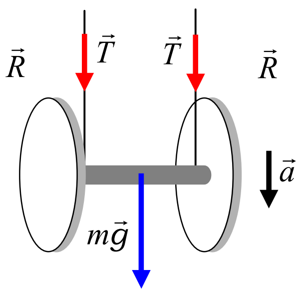
$$\upsilon = \upsilon_0 - at = 0 \Rightarrow a = \frac{\upsilon_0}{t};\; s = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}at^2 = \upsilon_0 t \;\; - \frac{1}{2}\frac{\upsilon_0}{t} t^2 \Rightarrow \; \upsilon_0 = \frac{2s}{t}.$$

$$J_0 = \frac{2}{5} m r^2;\; \upsilon_0 = \omega_0 r;\; E_k = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2} J_0\omega_0^2 \Rightarrow E_k = \frac{7}{10} m\upsilon_0^2 \Rightarrow \; E_k = \frac{7}{10} m \frac{4s^2}{t^2}.$$

$$W = F_v s \Rightarrow \; W = \xi \frac{mg}{r} s \;;\; W = E_k \Rightarrow \; \xi \frac{mg}{r} s = \frac{7}{10} m \frac{4s^2}{t^2} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{14\, r\, s}{5\, g\, t^2}}$$

9.5 Na osu činky (m) jsou navinuty dvě struny, které jsou připevněny k pevné vodorovné tyči. Jestliže činku pustíme, padá a zároveň se otáčí. Bylo pozorováno, že zrychlení jejího pádu je a. Vypočtěte tahovou sílu v každé struně. Jaká by musela být tato síla ve strunách, aby hmotný střed činky zůstával stále ve stejné výši?

$$m\,;\; a\,;\; g\,;\; T = ?$$



Na činku, pohybující se kromě rotačního i posuvným pohybem se zrychlením $\vec{a}$, působí síla, složená z **tíhové síly** a **reakcí** $\vec{R}$ $\left(\vec{R} \uparrow\downarrow \vec{g}\right)$ strun, které jsou opačné k **tahovým silám** $\vec{T}$ $\left(\vec{R} = -\vec{T};\; R = T\right)$. Proto platí

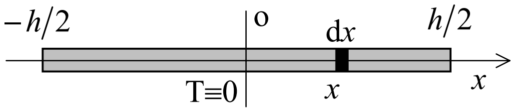
$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2\vec{R} \Rightarrow ma = mg - 2R = mg - 2T \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m\left(g - a\right)}$$

Nemá-li se činka pohybovat posuvným pohybem (což je rovnocenné podmínce $a = 0$), je nutno, aby tahová síla T' v každé struně byla rovna polovině tíhy činky

$$a = 0 \Rightarrow \boxed{T' = \frac{1}{2} mg}$$

9.6 Svislý sloup o výšce h se kácí kolem svého nejnižšího bodu. Určete rychlost dopadu jeho horního konce.



$$h\,;\; g\,;\; \upsilon = ?$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose o procházející **těžištěm** kolmo ke sloupu:

$$\sigma = m/h\,;\; \mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}x$$

$$J_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2 \sigma \,\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{3}\left[x^3\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{\sigma}{3}\left[\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8}\right)\right] \Rightarrow$$

$J_0 = \frac{1}{12} h \sigma h^2 \Rightarrow$ $J_0 = mh^2/12$. STEINEROVA věta pro osu kácení sloupu (kolmou ke sloupu) a procházející jeho koncem:

$$J = J_0 + m\frac{h^2}{4} \Rightarrow J = \frac{1}{12}mh^2 + \frac{3}{12}mh^2 \Rightarrow \quad J = \frac{1}{3}mh^2.$$

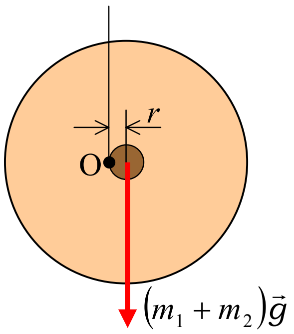
Úbytek ΔE_p potenciální energie sloupu při poklesu těžiště o $h/2$ je roven jeho rotační kinetické energii E_k při dopadu na zem – tedy

$$\Delta E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k} \Rightarrow mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}J\omega^2 \Rightarrow mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mh^2\omega^2 \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{h}}.$$

Nejvyšší bod sloupu se pohybuje po kružnici o poloměru h, jeho **obvodová** rychlost při dopadu je tedy

$$\upsilon = h\omega = h\sqrt{\frac{3g}{h}} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{3hg}}$$

9.7 S hřídelí o poloměru r je pevně spojen plný kotouč o poloměru R a hmotnosti m_1. Hřídel i kotouč jsou ze stejného materiálu, části hřídele vyčnívající z kotouče mají hmotnost m_2. Přístroj je zavěšen na stativu dvěma stejně dlouhými vlákny připevněnými k hřídeli. Namotáme-li vlákna na hřídel, kotouč se zvedne. Začnou-li se vlákna odmotávat, kotouč klesá. Určete zrychlení klesajícího kotouče.



$r; R; m_1; m_2; g$. $a = ?$

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose je (stejně jako hmotnost) aditivní veličina – je-li těleso tvořeno několika (homogenními) tělesy, je jeho moment setrvačnosti vzhledem k libovolné přímce roven součtu momentů setrvačnosti těchto těles vzhledem k této přímce. Osou o otáčení je přímka kolmá k rovině papíru procházející bodem O.

$$\text{Kotouč } (m_1, R):\ I_{\mathrm{T},1} = \frac{1}{2}m_1R^2, \text{ válec } (m_2, r):\ I_{\mathrm{T},2} = \frac{1}{2}m_2r^2.$$

STEINEROVA věta:

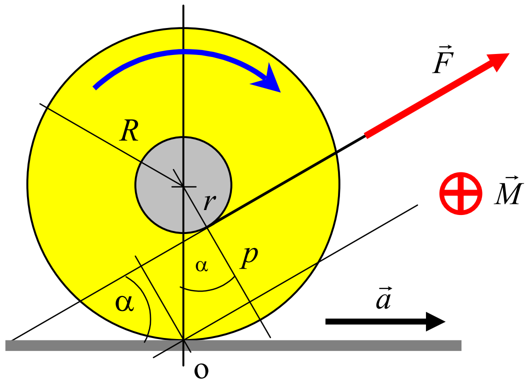
$$I_1 = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_1r^2,\ I_2 = \frac{1}{2}m_2r^2 + m_2r^2;\ I = I_1 + I_2 \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}\left(m_1R^2 + m_2r^2\right) + \left(m_1 + m_2\right)r^2;\ M_\mathrm{o} = \left(m_1 + m_2\right)gr.\ I\varepsilon = M_\mathrm{o} \Rightarrow \varepsilon = \frac{M_\mathrm{o}}{I} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{2\left(m_1 + m_2\right)gr}{\left(m_1R^2 + m_2r^2\right) + 2\left(m_1 + m_2\right)r^2};\ a = r\varepsilon \Rightarrow \boxed{a = \frac{2\left(m_1 + m_2\right)r^2}{\left(m_1R^2 + m_2r^2\right) + 2\left(m_1 + m_2\right)r^2}g}$$

9.8 Na vodorovném stole leží cívka nití (r,R,m). Jaké bude postupné zrychlení cívky, táhneme-li za nit silou F? Jaký musí být směr síly, má-li se cívka pohybovat ve směru napjaté niti?

$$r\,;\ R\,;\ m\,;\ F\,;\ \alpha = ?$$



Podle STEINEROVY věty je moment setrvačnosti cívky vzhledem k ose o

$$J = J_0 + mR^2 .$$

Moment síly $\vec{F}$ vzhledem k ose o má velikost

$$M = Fp \Rightarrow M = F\left(R\cos\alpha - r\right).$$

Z pohybové rovnice otáčení cívky vyjádříme úhlové zrychlení

$$\varepsilon = \frac{M}{J} \Rightarrow \varepsilon = \frac{F\left(R\cos\alpha - r\right)}{J_0 + mR^2}.$$

Pro zrychlení **posuvného** pohybu (těžiště) cívky dostáváme

$$a = \varepsilon R \Rightarrow \boxed{a = \frac{R\left(R\cos\alpha - r\right)F}{J_0 + mR^2}}$$

Diskuse o směru síly $\vec{F}$ a směru zrychlení $\vec{a}$.

A. V námi zakresleném případě a obecně tehdy, když

$$\alpha \in \left(0;\alpha_0 = \arccos\frac{r}{R}\right),$$

se cívka otáčí tak, že se její těžiště posouvá zleva doprava (přibližně tedy ve směru síly $\vec{F}$ – cívka je „poslušná“ a nit se při jejím pohybu **navíjí**).

B. Pro $\alpha_0 = \arccos\dfrac{r}{R}$ se cívka neotáčí (moment síly $\vec{F}$ vzhledem k ose o je nulový) a je (přibližně) ve směru síly $\vec{F}$ **vlečena**.

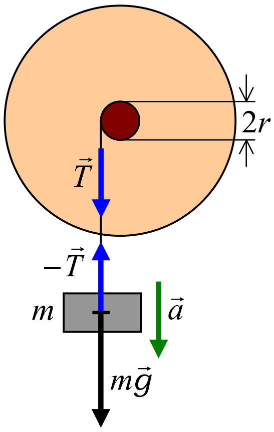
C. Pro $\alpha > \arccos\dfrac{r}{R}$ se cívka při otáčení v opačném smyslu, než v případě **A,** posouvá zprava doleva – cívka je „neposlušná“ a nit se z ní při otáčení **odvíjí**.

9.9 Setrvačník $\left(I_\mathrm{T} = 100\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\right)$ je souose připevněn na hřídeli $(r = 0{,}05\ \mathrm{m})$, jehož hmotnost i moment setrvačnosti zanedbáváme. Na hřídeli je navinuto lanko, na němž visí závaží $(m = 40\ \mathrm{kg})$. S jak velkým zrychlením se setrvačník roztáčí a jakou dráhu urazí závaží za $20\ \mathrm{s}$? $\left(g = 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)$

$$I_\mathrm{T} = 100\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2;\ t = 20\ \mathrm{s};\ r = 0{,}05\ \mathrm{m};\ m = 40\ \mathrm{kg}.$$
$$\varepsilon, s = ?$$

1. Dynamické řešení

Pro zrychlení $\vec{a}$ pohybu závaží platí



$$m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{T} \Rightarrow \vec{T} = m\left(\vec{g} - \vec{a}\right).$$

Setrvačník je roztáčen silou $\vec{T}$, takže pohybová rovnice jeho rotačního pohybu kolem pevné vodorovné osy procházející jeho těžištěm (kolmo k rovině nákresu) má tvar $(\varepsilon = a/r)$ $I_T\varepsilon = Tr$. Dosadíme-li do tohoto výrazu za T a za ε, dostaneme

$$I_T \frac{a}{r} = m(g-a)r \Rightarrow a\left(\frac{I_T}{r^2} + m\right) = mg \Rightarrow a = \frac{mg}{\frac{I_T}{r^2} + m} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{mg}{\frac{I_T}{r} + mr}}, \ \varepsilon = 0{,}2\ \mathrm{s}^{-2}.$$

Dráhu s závaží za čas t od začátku jeho pohybu z klidu určíme jako

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \boxed{s = \frac{1}{2}\frac{mg}{\frac{I_T}{r^2} + m}t^2}, \ s = 2\ \mathrm{m}.$$

2. Energetické řešení

Součet kinetické energie $E_{k,rot}$ rotačního pohybu setrvačníku a kinetické energie E_k posuvného pohybu závaží je roven absolutní hodnotě úbytku ΔE_p potenciální energie závaží; platí tedy energetická bilance

$$\left|\Delta E_p\right| = E_{k,rot} + E_k \Rightarrow mgs = \frac{1}{2}I_T\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

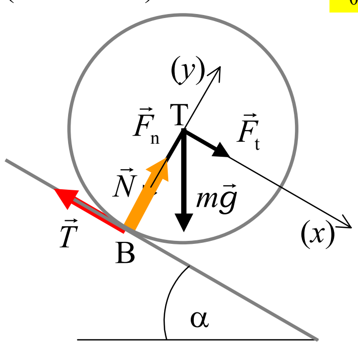
Dosadíme-li do tohoto výrazu za ω výraz v/r, dostaneme

$$mgs = \frac{1}{2}I_T\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow mgs = \frac{1}{2}\left(\frac{I_T}{r^2} + m\right)v^2.$$

Derivujeme-li poslední rovnici podle času, obdržíme

$$mg\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_T}{r^2} + m\right)2v\frac{dv}{dt} \Rightarrow mgv = \left(\frac{I_T}{r^2} + m\right)va \Rightarrow a = \frac{mg}{\frac{I_T}{r^2} + m} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{mg}{\frac{I_T}{r} + mr}}$$

9.10 Na nakloněné rovině (α) se nachází homogenní kulička. Pro jaké hodnoty (statického) součinitele k_0 třecí síly mezi kuličkou a nakloněnou rovinou nebude kulička při svém pohybu po nakloněné rovině klouzat?



Předpokládejme, že kulička (m, R) při pohybu po nakloněné rovině neprokluzuje (jde o tzv. čisté valení). Pohybové rovnice posuvného pohybu těžiště kuličky a rotace kuličky (kolem vodorovné osy procházející těžištěm kuličky a kolmé ke spádové přímce nakloněné roviny) pak můžeme zapsat ve tvaru

$$m\ddot{x}_T = mg\sin\alpha - T, \ m\ddot{y}_T = 0 = N - mg\cos\alpha;$$

$$I_0\dot{\omega} = RT\,;$$

$N = mg\cos\alpha$ je reakce nakloněné roviny na tíhu kuličky; I_0 je moment setrvačnosti kuličky vzhledem k ose procházející těžištěm; T je velikost tzv. adhezní síly, zajišťující čisté válení kuličky, což je stav, při němž je (okamžitý) dotykový bod kuličky vůči nakloněné rovině v klidu. Za této situace je možno složený pohyb kuličky převést na čistou rotaci kolem osy procházející bodem B. Pak platí $\dot{x}_\mathrm{T} = \upsilon_\mathrm{T} = R\omega$, $\ddot{x}_\mathrm{T} = R\dot{\omega}$ a z výše uvedených pohybových rovnic dostáváme

$$m\ddot{x}_\mathrm{T} + \frac{I_0}{R}\dot{\omega} = mg\sin\alpha \Rightarrow m\ddot{x}_\mathrm{T} + \frac{I_0}{R^2}\ddot{x}_\mathrm{T} = mg\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_\mathrm{T} = \frac{mg\sin\alpha}{m + \dfrac{I_0}{R^2}} \Rightarrow \ddot{x}_\mathrm{T} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \dfrac{I_0}{mR^2}} \Rightarrow \ddot{x}_\mathrm{T} = \frac{g\sin\alpha}{1+\varphi}\,;\ \varphi = \frac{I_0}{mR^2}\,.$$

$$\dot{\omega} = \frac{\ddot{x}_\mathrm{T}}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{g\sin\alpha}{R(1+\varphi)}\,.\ T = \frac{I_0}{R}\dot{\omega} = \frac{I_0}{mR^2}\frac{mg\sin\alpha}{1+\varphi} \Rightarrow T = \frac{\varphi mg\sin\alpha}{1+\varphi}\,.$$

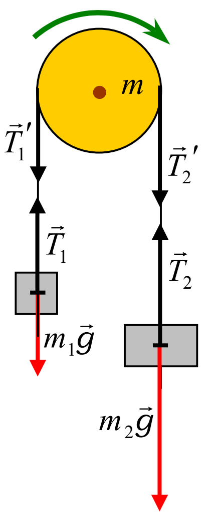
Má-li být adhezní silou třecí síla $\vec{F}_\mathrm{T}$, musí pro její velikost platit

$$F_\mathrm{T} = k_0 mg\cos\alpha \geq T = \frac{\varphi mg\sin\alpha}{1+\varphi} \Rightarrow \boxed{k_0 \geq \frac{\varphi}{1+\varphi}\operatorname{tg}\alpha}$$

Pro kuličku platí

$$I_0 = \frac{2}{5}mR^2 \Rightarrow \varphi = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{k_0 \geq \frac{2}{7}\operatorname{tg}\alpha}$$

9.11 Přes pevnou kladku, jejíž hmotnost je $m = 0{,}08\ \mathrm{kg}$, je vedena dokonale ohebná nit zanedbatelné hmotnosti. Na koncích niti visí závaží o hmotnostech $m_1 = 0{,}10\ \mathrm{kg}$ a $m_2 = 0{,}20\ \mathrm{kg}$. Určete zrychlení soustavy při pohybu závaží následkem tíhové síly a síly napínající nit.



$m = 0{,}08\ \mathrm{kg}\,;\ m_1 = 0{,}10\ \mathrm{kg}\,;\ m_2 = 0{,}20\ \mathrm{kg}\,;\ a, T_1', T_2' = ?$

Uvažujeme-li hmotnost kladky, musíme opustit představu o stejně velikých silách napínajících nit na obou stranách kladky. K roztáčení kladky o poloměru R je totiž zapotřebí nenulový výsledný moment

$$M = T_2'R - T_1'R = (T_2' - T_1')R$$

co do velikosti různých sil $\vec{T}_1'$ a $\vec{T}_2'$ napínajících nit na obou stranách kladky (v našem případě je $T_2' > T_1'$). Pohybová rovnice kladky je pak

$$M = I_\mathrm{T}\varepsilon \Rightarrow (T_2' - T_1')R = I_\mathrm{T}\varepsilon\,.$$

Nedochází-li k prokluzování niti na obvodu kladky, je souvislost úhlového zrychlení ε kladky a (posuvného) zrychlení a niti a obou závaží dána vztahem $a = R\varepsilon$.

Zapíšeme druhý pohybový zákon pro obě závaží.

1. závaží $\quad m_1 a = T_1 - m_1 g \Rightarrow T_1 = (g+a)m_1\,,$

2. závaží $\quad m_2 a = m_2 g - T_2 \Rightarrow T_2 = (g-a)m_2$;

($\vec{T}_1$ a $\vec{T}_1$ jsou reakce niti na síly $\vec{T}_1'$ a $\vec{T}_2'$, které je napínají $\Rightarrow T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$).

Pohybovou rovnici kladky můžeme po dosazení za $\vec{T}_1'$ a $\vec{T}_2'$ zapsat ve tvaru

$$(T_2 - T_1)R = I_\mathrm{T}\varepsilon \Rightarrow \left[(g-a)m_2 - (g+a)m_1\right]R = I_\mathrm{T}\frac{a}{R} \Rightarrow$$

$$a\left(m_1 + m_2 + \frac{I_\mathrm{T}}{R^2}\right)R^2 = (m_2 - m_1)R^2 g \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{I_\mathrm{T}}{R^2}}g.$$

Pokládáme-li kladku za homogenní kotouč hmotnosti m a poloměru R, má její moment setrvačnosti vzhledem k vodorovné ose procházející těžištěm hodnotu

$$I_\mathrm{T} = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2(m_2 - m_1)}{2m_1 + 2m_2 + m}g}$$

Dosadíme-li za zrychlení do vyjádření sil T_1 a T_1, obdržíme pro velikosti sil $\vec{T}_1'$ a $\vec{T}_2'$ napínající nit vztahy

$$\boxed{T_1' = \frac{4m_2 + m}{2m_1 + 2m_2 + m}m_1 g}, \quad \boxed{T_2' = \frac{4m_1 + m}{2m_1 + 2m_2 + m}m_2 g > T_1'}$$

9.12 Přes pevnou kladku umístěnou na okraji stolu je vedena dokonale ohebná nit zanedbatelné hmotnosti. Hmotnost kladky je $m = 0{,}10\ \mathrm{kg}$. Závaží hmotnosti $m_1 = 0{,}25\ \mathrm{kg}$ upevněné na jednom konci niti leží na stole, na druhém konci niti visí závaží hmotnosti $m_2 = 0{,}20\ \mathrm{kg}$. Součinitel třecí síly mezi prvním závažím a deskou stolu je $k = 0{,}20$. Určete zrychlení soustavy při pohybu závaží následkem tíhové síly a síly napínající nit.

$m_1 = 0{,}25\ \mathrm{kg}$; $m_2 = 0{,}20\ \mathrm{kg}$; $m = 0{,}10\ \mathrm{kg}$; $k = 0{,}20$; $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $a, T_1', T_2' = ?$

$$M = (T_2' - T_1')R = I_\mathrm{T}\varepsilon;\ \varepsilon = \frac{a}{R}.$$

$$m_1 a = T_1 - k m_1 g \Rightarrow T_1 = k m_1 g + m_1 a;\ m_2 a = m_2 g - T_2 \Rightarrow T_2 = m_2 g - m_2 a.$$

$$T_2' - T_1' = T_2 - T_1 = m_2 g - m_2 a - k m_1 g - m_1 a.$$

$$(m_2 g - m_2 a - k m_1 g - m_1 a)R = I_\mathrm{T}\frac{a}{R} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2(m_2 - k m_1)}{2m_1 + 2m_2 + m}g},\ a = 3{,}43\ \mathrm{m\cdot s^{-2}};$$

$$\boxed{T_1' = \frac{2(1+k)m_2 + km}{2m_1 + 2m_2 + m}m_1 g},\ T_1' \doteq 1{,}23\ \mathrm{N};$$

$$\boxed{T_2' = \frac{2(1+k)m_1 + m}{2m_1 + 2m_2 + m}m_2 g},\ T_2' \doteq 1{,}18\ \mathrm{N}$$

9.13 Na pevné kladce hmotnosti m je upevněna a navinuta dokonale ohebná nit zanedbatelné hmotnosti. Na konci niti visí závaží hmotnosti M. Určete zrychlení závaží při jeho pohybu následkem tíhové síly a sílu napínající nit.
$\left[a = 2m_1 g / (2m_1 + m);\ T = m m_1 g / (2m_1 + m)\right]$

$$T'R = I_{\mathrm{T}}\varepsilon\ ;\ \varepsilon = \frac{a}{R}.\ m_1 a = m_1 g - T \Rightarrow T = m_1 g - m_1 a.$$

$$(m_1 g - m_1 a) R = I_{\mathrm{T}} \frac{a}{R} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2m_1}{2m_1 + m} g},\ \boxed{T = \frac{m}{2m_1 + m} m_1 g}$$

9.14 Do sklenice tvaru rotačního válce (M, R, υ) naléváme kapalinu (ρ). Při jaké výšce hladiny (h) bude mít sklenice s kapalinou největší stabilitu.

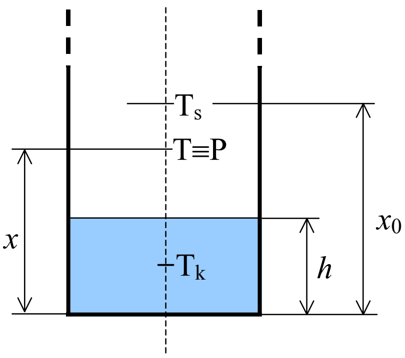
M ; R ; h ; ρ ; $h = ?$

V souřadnicovém systému **hmotného středu** soustavy sklenice + kapalina platí

$$M(x_0 - x) - \left(x - \frac{h}{2}\right) S\rho h = 0 \Rightarrow x = \frac{x_0 + \frac{1}{2}\frac{S\rho}{M} h^2}{1 + \frac{S\rho}{M} h}.$$

Položíme-li $\dfrac{M}{\rho S} = \mathrm{A}$ a $\dfrac{h}{\mathrm{A}} = B$, dostaneme

$$x = \frac{x_0 + \frac{1}{2}\mathrm{A}B^2}{1 + B}\ (❖).$$



Nyní hledáme lokální minimum této funkce v závislosti na proměnné B (na výšce h hladiny kapaliny v nádobě). Z podmínky nulové první derivace dostaneme postupně

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}B} = \frac{\mathrm{A}B(1+B) - \left(x_0 + \frac{1}{2}\mathrm{A}B^2\right)}{1+B} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{A}B^2 + \mathrm{A}B - x_0 = 0.$$

Řešením této kvadratické rovnice dostaneme (vyhovující) řešení ve tvaru

$$B_{1,2} = \frac{-\mathrm{A} \pm \sqrt{\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A}x_0}}{\mathrm{A}} \Rightarrow B = \sqrt{1 + \frac{2x_0}{\mathrm{A}}} - 1 \quad \left(= \frac{h}{\mathrm{A}}\right).$$

Dosadíme-li tuto hodnotu proměnné do funkce (❖), dostaneme hodnotu jejího lokálního minima

$$x_{\min} = \frac{x_0 + \frac{1}{2}A\left(1 + \frac{2x_0}{A} + 1 - 2\sqrt{1 + \frac{2x_0}{A}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2x_0}{A}}} =$$

$$= \frac{2x_0 + A - A\sqrt{1 + \frac{2x_0}{A}}}{\sqrt{1 + \frac{2x_0}{A}}} = \frac{A\left(1 + \frac{2x_0}{A} - \sqrt{1 + \frac{2x_0}{A}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2x_0}{A}}} \Rightarrow$$

$$x_{\min} = A\left(\sqrt{1+\tfrac{2x_0}{A}}-1\right) = AB = A\frac{h}{A} \Rightarrow \boxed{x_{\min} = h}$$

Stabilita sklenice s kapalinou je tedy **největší** (těžiště soustavy je nejníže), je-li hmotný střed soustavy sklenice + kapalina v úrovni hladiny kapaliny ve sklenici. Konkrétní hodnotu $x_{\min} = h$ bychom mohli určit při znalosti hodnot (konstant) x_0 a a.