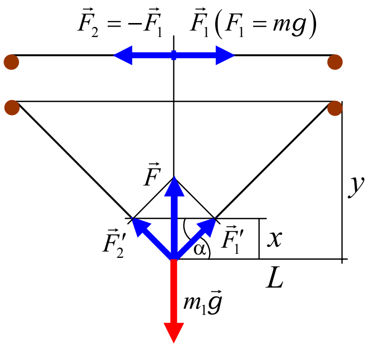
8. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

8.1 Přes dvě malé kladky vzdálené $2L$ je napjato vodorovné vlákno, na jehož obou koncích visí stejné závaží (m). Oč klesne vlákno, zavěsíme-li na něj doprostřed mezi kladky závaží hmotnosti m_1.



$2L$; m ; m_1 ; g ; $y = ?$

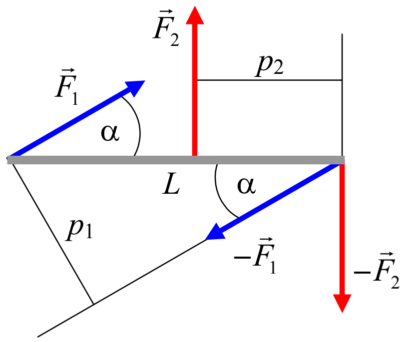
$$F_1 = F_2 = F_1' = F_2' = mg\,;\ \vec{F} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'\,;\ F = m_1 g\,.$$

$$x^2 = m^2 g^2 - \frac{1}{4} m_1^2 g^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{g^2}{4}\left(4m^2 - m_1^2\right) \Rightarrow x = \frac{g}{2}\sqrt[2]{4m^2 - m_1^2}\,.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{L} = \frac{1}{2}\frac{m_1 g}{x} \Rightarrow y = \frac{m_1 g}{2x} L \Rightarrow y = \frac{2 m_1 g}{2g\sqrt[2]{4m^2 - m_1^2}} L \Rightarrow \boxed{y = \frac{m_1}{\sqrt[2]{4m^2 - m_1^2}} L}$$

8.2 Na koncích tyče délky $3\,\mathrm{m}$ působí dvě stejně velké síly opačného směru o velikostech $300\,\mathrm{N}$, jejichž směr svírá s tyčí úhel 30°. Nahraďte tuto dvojici sil jinou dvojicí, jejíž síly mají velikost $400\ \mathrm{N}$ a směr kolmý k tyči.



$L = 3\ \mathrm{m}$; $\alpha = 30^\circ$, $F_1 = 300\ \mathrm{N}$; $F_2 = 400\ \mathrm{N}$;
$p_2 = ?$

$$p_1 = L\sin\alpha\,,\ M_{\mathrm{D1}} = F_1 p_1 = F_1 L \sin\alpha\,,$$

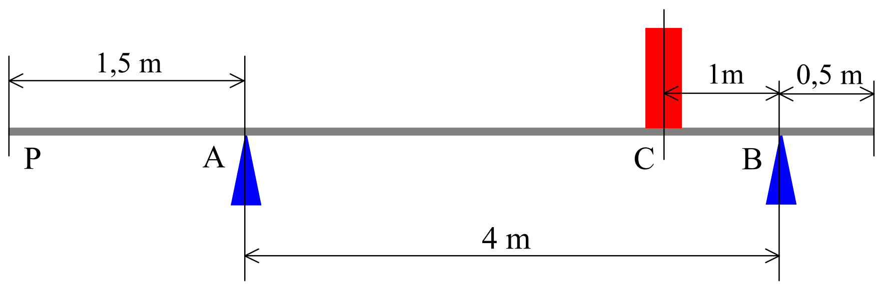
$$M_{\mathrm{D2}} = F_2 p_2\,,$$

$$M_{\mathrm{D1}} = M_{\mathrm{D2}} \Rightarrow F_1 L \sin\alpha = F_2 p_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{p_2 = \frac{F_1}{F_2} L \sin\alpha}$$

8.3 Na desce položené na dvou oporách stojí člověk o hmotnosti $60\ \mathrm{kg}$ (viz obrázek). Hmotnost desky je $80\ \mathrm{kg}$. Určete velikosti sil působících na opory. $\left(g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)$

$m = 60\ \mathrm{kg}$, $M = 80\ \mathrm{kg}$; $L = 6\ \mathrm{m}$; $r_A = \frac{1}{4}L$; $r_B = \frac{11}{12}L$. $F_A, F_B = ?$



Poloha těžiště desky: $r_D = \frac{1}{2}L$; poloha těžiště člověka: $r_C = \frac{3}{4}L$. Poloha těžiště soustavy deska + člověk:

$$r_T = \frac{Mr_D + mr_C}{M+m} \Rightarrow r_T = \frac{M\frac{1}{2}L + m\frac{3}{4}L}{M+m} \Rightarrow r_T = \frac{2M+3m}{4(M+m)}L.$$

Rozklad výslednice $\vec{F}$ $[F = (M+m)g]$ na síly $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ s působišti v bodech A a B:

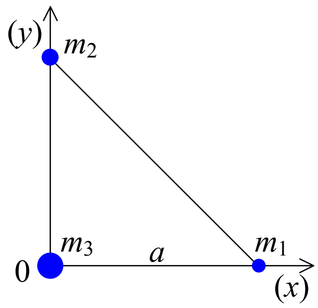
$$Fr_T = F_A r_A + F_B r_B \wedge F_A + F_B = F \Rightarrow F\frac{2M+3m}{4(M+m)}L = F_A\frac{L}{4} + F_B\frac{11L}{12} \Rightarrow$$

$$(M+m)g\frac{2M+3m}{4(M+m)} = F_A\frac{1}{4} + [(M+m)g - F_A]\frac{11}{12} \Rightarrow$$

$$\boxed{F_A = \frac{1}{8}(5M+2m)g},\ F_A = 750\ \text{N}.$$

$$F_B = (M+m)g - F_A \Rightarrow \boxed{F_B = \frac{3}{8}(M+2m)g},\ F_B = 650\ \text{N}$$

8.4 Určete polohu hmotného středu soustavy kuliček o hmotnostech 1 kg, 2 kg, 3 kg, jejichž středy leží ve vrcholech rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s největší hmotností ve vrcholu pravého úhlu.



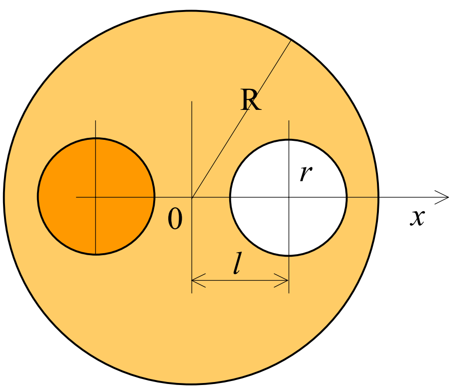
$m_1 = 1\ \text{kg} = m$; $m_2 = 2\ \text{kg} = 2m$; $m_3 = 3\ \text{kg} = 3m$, a; $x_{HS} = ?$

$$\vec{r}_1(a;0);\ \vec{r}_2(0;a);\ \vec{r}_3(0;0) \Rightarrow$$

$$\vec{r}_{HS} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1+m_2+m_3} \Rightarrow x_{HS} = \frac{a}{6};\ y_{HS} = \frac{a}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}_{HS} = \left(\frac{a}{6}; \frac{a}{3}\right)}$$

8.5 Určete polohu těžiště homogenní kruhové desky poloměru R s vyříznutým kruhovým otvorem poloměru r. Vzdálenost středů obou kruhů je l.



$R; r; l; \sigma$. $\vec{r}_T = ?$; (σ - plošná hustota desky)

„Vyřízněme“ ještě jeden otvor, symetrický vzhledem ke středu desky. Pak jej opět „vložme“ na své místo a hledejme hmotný střed soustavy: deska se dvěma otvory + malý, na své místo opět vložený kruh.

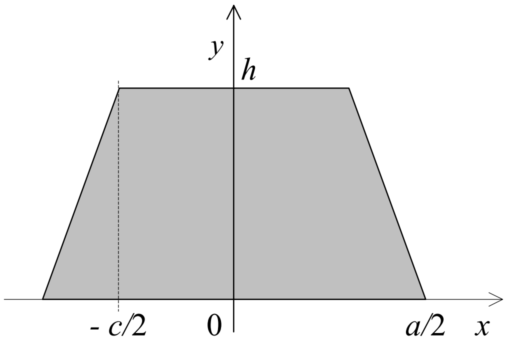
$$M = (\pi R^2 - 2\pi r^2)\sigma = (R^2 - 2r^2)\pi\sigma,$$

$$x_{T,M} = 0;\ m = \pi r^2\sigma,\ x_{T,m} = -l.$$

$$x_T = \frac{Mx_{T,M} + mx_{T,m}}{M+m} \Rightarrow x_T = \frac{-\pi r^2\sigma l}{(R^2-2r^2)\pi\sigma + \pi r^2\sigma} \Rightarrow \boxed{x_T = -\frac{r^2}{R^2-r^2}l}$$

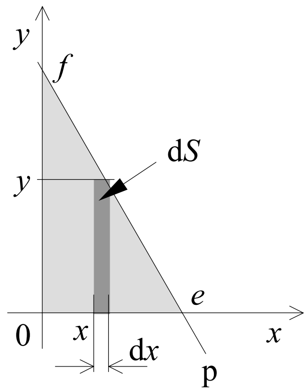
7.6 Určete polohu těžiště rovinné desky tvaru rovnoramenného lichoběžníka o základnách a, c a výšce h.

$a; c; h$; $\vec{r}_{\mathrm{T}} = ?$



Vzhledem ke tvaru tělesa je zřejmé, že v dané souřadnicové soustavě je $x_{\mathrm{T}} = 0$. Při určení druhé souřadnice y_{T} se stačí zabývat pouze jednou, např. pravou **polovinou** tělesa, kterou tvoří **obdélník** a **pravoúhlý trojúhelník**.

Těžiště **samotného obdélníka** je v jeho geometrickém středu – jeho polohový vektor je tedy $\vec{r}_{\mathrm{T,o}}\left(c/4; h/2\right)$.



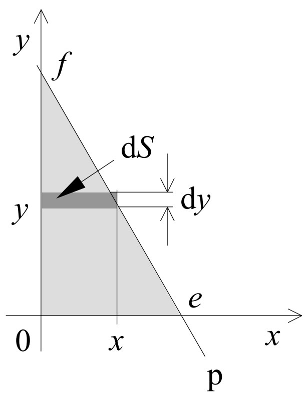
Polohový vektor $\left(\vec{r}_{\mathrm{T,t}}\right)$ těžiště **samotného trojúhelníka** určíme následujícím způsobem. Rovnice přímky p, na níž leží přepona trojúhelníka, má tvar $y = -\dfrac{f}{e}x + f$. Plošný obsah S trojúhelníka a první souřadnici $\left(x_{\mathrm{T,t}}\right)$ jeho těžiště určíme určitou integrací jako

$$S = \frac{1}{2}ef;\ \left(x_{\mathrm{T\,t}}\right) = \frac{1}{S}\int_{(S)} x\,\mathrm{d}S\,.$$

Element $\mathrm{d}S$ plochy trojúhelníka přitom musí být vybrán tak, aby všechny jeho body měly stejnou **první** souřadnici (x). Pro plošný obsah takového elementu dostáváme

$$\mathrm{d}S = y\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{f}{e}x + f\right)\mathrm{d}x\,.$$

Pro první souřadnici $\left.x_{\mathrm{T,t}}\right)$ těžiště trojúhelníka tedy dostáváme



$$\left(x_{\mathrm{T,t}}\right) = \frac{2}{ef}\int_0^e x\left(-\frac{f}{e}x + f\right)\mathrm{d}x = -\frac{2}{e^2}\int_0^e x^2\mathrm{d}x + \frac{2}{e}\int_0^e x\,\mathrm{d}x \Rightarrow$$

$$\left(x_{\mathrm{T,t}}\right) = -\frac{2}{e^2}\frac{e^3}{3} + \frac{2}{e}\frac{e^2}{2} \Rightarrow \left(x_{\mathrm{T,t}}\right) = \frac{1}{3}e.$$

Druhou souřadnici $\left(y_{\mathrm{T,t}}\right)$ těžiště trojúhelníka získáme obdobným způsobem.

$$\mathrm{p}:\ y = -\frac{f}{e}x + f \Rightarrow x = -\frac{e}{f}y + e;$$

$$\mathrm{d}S = x\,\mathrm{d}y = \left(-\frac{e}{f}y + e\right)\mathrm{d}y\ ;\ \left(y_{\mathrm{T,t}}\right) = \frac{1}{S}\int_{(S)} y\,\mathrm{d}S \Rightarrow$$

$$\left(y_{\mathrm{T,t}}\right) = \frac{2}{ef}\int_0^f y\left(-\frac{e}{f}y + e\right)\mathrm{d}y = -\frac{2}{f^2}\int_0^f y^2\mathrm{d}y + \frac{2}{f}\int_0^f y\,\mathrm{d}y \Rightarrow$$

$$\left(y_{\mathrm{T,t}}\right)=-\frac{2}{3}f+f\Rightarrow\left(y_{\mathrm{T,t}}\right)=\frac{1}{3}f.$$

Vrátíme-li se k našemu původnímu úkolu, můžeme určit polohový vektor těžiště $\mathrm{T_t}$ trojúhelníka při jeho poloze v uvažovaném tělese.

Vodorovná odvěsna trojúhelníka má délku $e=\frac{1}{2}(a-c)$. Respektujeme-li polohu trojúhelníka v uvažovaném tělese, dostaneme pro první souřadnici $x_{\mathrm{T,t}}$ jeho těžiště $\mathrm{T_t}$

$$x_{\mathrm{T,t}}=\frac{c}{2}+\frac{1}{3}e=\frac{c}{2}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(a-c)\right]\Rightarrow x_{\mathrm{T,t}}=\frac{1}{6}(a+2c).$$

Druhá souřadnice $y_{\mathrm{T,t}}$ těžiště trojúhelníka je

$$y_{\mathrm{T,t}}=\frac{1}{3}f\wedge f=h\Rightarrow y_{\mathrm{T,t}}=\frac{1}{3}h.$$

Polohové vektory těžišť **obdélníka** a **trojúhelníka** jsou tedy

$$\vec{r}_{\mathrm{T,o}}\left(\frac{c}{4};\ \frac{h}{2}\right),\quad \vec{r}_{\mathrm{T,t}}\left[\frac{1}{6}(a+2c);\ \frac{1}{3}h\right].$$

Polohu těžiště **poloviny lichoběžníka** určíme podle vztahu

$$\vec{r}_{\mathrm{T,L/2}}=\frac{1}{m_{\mathrm{o}}+m_{\mathrm{t}}}\left(m_{\mathrm{o}}\vec{r}_{\mathrm{T,o}}+m_{\mathrm{t}}\vec{r}_{\mathrm{T,t}}\right),$$

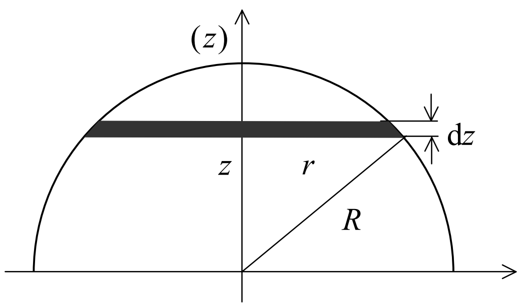
kde $m_{\mathrm{o}}=hc\sigma/2$ a $m_{\mathrm{t}}=h(a-c)\sigma/4$. Potřebujeme pouze **druhou** souřadnici, pro niž platí

$$y_{\mathrm{T,L/2}}=\frac{4}{h(a+c)\sigma}\left[\frac{hc}{2}\sigma\frac{h}{2}+\frac{h(a-c)}{4}\sigma\frac{h}{3}\right]\Rightarrow y_{\mathrm{T,L/2}}=\frac{a+2c}{3(a+c)}h,$$

Polohový vektor těžiště **celého lichoběžníka** má stejnou druhou složku; je tedy

$$\boxed{\vec{r}_{\mathrm{T}}\left(0;\frac{a+2c}{3(a+c)}h\right)}$$

8.7 Určete polohu hmotného středu homogenní polokoule $(\rho=\text{konst.};R)$



Osa symetrie $\mathrm{s}\equiv 0z\Rightarrow\mathrm{T}\in\mathrm{s}\Rightarrow\mathrm{T}(0;0;z_{\mathrm{T}})$.

Hmotnost elementu tělesa je $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}V$. ***Zásada*** – všechny body elementu musí mít **stejnou** třetí souřadnici (z). Objem elementu tělesa je $\mathrm{d}V=\pi r^2\mathrm{d}z=\pi\left(R^2-z^2\right)\mathrm{d}z$.

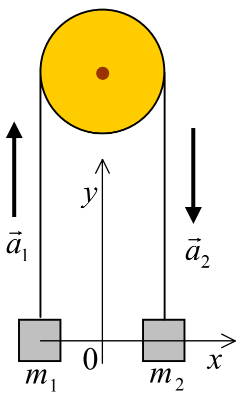
$$V=\int_{(V)}\mathrm{d}V=\int_0^R \pi\left(R^2-z^2\right)\mathrm{d}z=\left[\pi R^2 z-\frac{1}{3}\pi z^3\right]_0^R \Rightarrow V=\pi R^3-\frac{1}{3}\pi z^3 \Rightarrow V=\frac{2}{3}\pi R^3;$$

$$\vec{r}_\mathrm{T}=\frac{1}{V}\int_{(V)}\vec{r}\,\mathrm{d}V \Rightarrow z_\mathrm{T}=\frac{1}{V}\int_{(V)}z\,\mathrm{d}V \Rightarrow$$

$$z_\mathrm{T}=\frac{3}{2\pi R^3}\int_0^R z\pi\left(R^2-z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{3}{2R^3}\left[R^2\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right]_0^R=\frac{3}{2R^3}\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right)\Rightarrow$$

$$z_\mathrm{T}=\frac{3}{8}R \Rightarrow \boxed{\mathrm{T}\left[0;0;\frac{3}{8}R\right]}$$

8.8 Přes pevnou kladku, jejíž hmotnost zanedbáváme, je vedena dokonale ohebná nit zanedbatelné hmotnosti. Na koncích niti visí závaží o hmotnostech $m_1=1\ \mathrm{kg}$ a $m_2=2\ \mathrm{kg}$. Určete zrychlení jejich hmotného středu při pohybu závaží následkem tíhové síly.



$m_1=1\ \mathrm{kg}$, $m_2=2\ \mathrm{kg}$; $\vec{a}_\mathrm{HS}=?$

Pro polohový vektor hmotného středu dvou těles obecně platí

$$\vec{r}_\mathrm{HS}=\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2\right)$$

a proto také

$$\ddot{\vec{r}}_\mathrm{HS}=\vec{a}_\mathrm{HS}=\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2\right).$$

Obě závaží se pohybují se zrychleními téže velikosti; platí tedy

$$a_1=a_2=a=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g=\frac{1}{3}g \Rightarrow \vec{a}_1\left(0;g/3\right),\ \vec{a}_2\left(0;-g/3\right).$$

Pro složky zrychlení $\vec{a}_\mathrm{HS}$ hmotného středu pak dostáváme

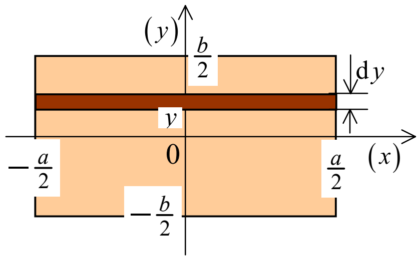
$$a_{\mathrm{HS},x}=\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1a_{1,x}+m_2a_{2,x}\right)\Rightarrow a_{\mathrm{HS},x}=0;$$

$$a_{\mathrm{HS},y}=\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1a_{1,y}+m_2a_{2,y}\right)\Rightarrow a_{\mathrm{HS},y}=-\frac{1}{9}g \Rightarrow \boxed{\vec{a}_\mathrm{HS}\left(0;-g/9\right)}$$

8.9 Určete moment setrvačnosti homogenní obdélníkové desky o rozměrech a,b a hmotnosti m vzhledem **a)** k ose procházející středem desky rovnoběžně s její delší stranou, **b)** k ose procházející těžištěm desky rovnoběžně s její kratší stranou, **c)** k ose procházející některým z okrajů desky.

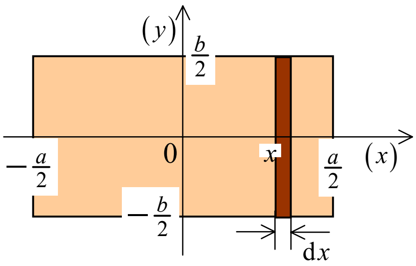
a,b; $I_{\mathrm{o},a},I_{\mathrm{o},b},I_{\mathrm{o},c}=?$; plošná hustota desky je $\sigma=m/(ab)$.

a) Moment setrvačnosti vzhledem k ose $0x$. Všechny body tmavě zbarveného elementu šířky $\mathrm{d}y$ délky a a hmotnosti $\mathrm{d}m=\sigma a\mathrm{d}y$ mají od dané osy otáčení stejnou vzdálenost y. Pokrytí celé desky těmito elementy vyžaduje určitou integraci v mezích $-b/2$ a $b/2$. Příslušný moment setrvačnosti tedy určíme výpočtem určitého integrálu



$$I_{o,a}=\int_m y^2\mathrm{d}m=\int_{-b/2}^{b/2}\sigma a\,y^2\mathrm{d}y=\frac{m}{ab}a\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2}=$$

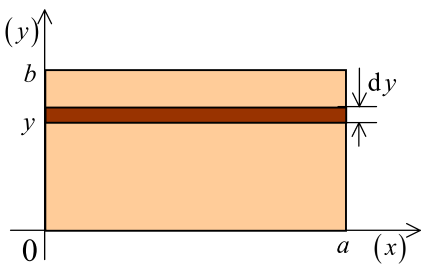
$$=\frac{m}{b}\left(\frac{b^3}{24}+\frac{b^3}{24}\right)\Rightarrow\boxed{I_{o,a}=\frac{1}{12}mb^2}$$



b) Moment setrvačnosti vzhledem k ose $0y$. Všechny body tmavě zbarveného elementu šířky $\mathrm{d}x$ délky b a hmotnosti $\mathrm{d}m=\sigma b\,\mathrm{d}x$ mají od dané osy otáčení stejnou vzdálenost x. Pokrytí celé desky těmito elementy vyžaduje určitou integraci v mezích $-a/2$ a $a/2$. Příslušný moment setrvačnosti tedy určíme výpočtem určitého integrálu

$$I_{o,b}=\int_m x^2\mathrm{d}m=\int_{-a/2}^{a/2}\sigma b\,x^2\mathrm{d}x=\frac{m}{ab}b\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2}=\frac{m}{a}\left(\frac{a^3}{24}+\frac{a^3}{24}\right)\Rightarrow\boxed{I_{o,b}=\frac{1}{12}ma^2}$$

c) Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházejícím např. delším okrajem desky (osou $0x$). Proti části **a)** dojde pouze ke změně integračních mezí; tentokrát jimi jsou hodnoty 0 a b. Příslušný moment setrvačnosti tedy určíme výpočtem určitého integrálu



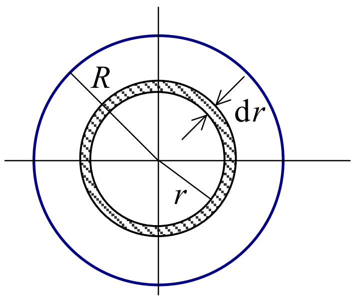
$$I_{o,c}=\int_m y^2\mathrm{d}m=\int_0^b\sigma a\,y^2\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{m}{ab}b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^b=\frac{m}{b}\left(\frac{b^3}{3}-0\right)\Rightarrow\boxed{I_{o,c}=\frac{1}{3}mb^2}$$

8.10 Určete moment setrvačnosti homogenního válce (R,v,ρ) vzhledem k jeho ose symetrie.

Osa symetrie válce je kolmá k rovině papíru. **Zásada** – všechny body objemového elementu musí být stejně vzdáleny od osy otáčení.

Objem elementu válce je $\mathrm{d}V=2\pi rv\,\mathrm{d}r$; hmotnost tohoto elementu je $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}V=\rho 2\pi rv\,\mathrm{d}r$.



$$I=\rho\int_{(V)}r^2\mathrm{d}V=\rho\int_0^R r^2 2\pi vr\,\mathrm{d}r=$$

$$=2\pi\rho v\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R=2\pi\rho v\frac{R^4}{4}\Rightarrow J=\rho\pi R^2v\frac{R^2}{2}=\rho V\frac{R^2}{2}\Rightarrow$$

$$\boxed{I=\frac{1}{2}mR^2}$$