7. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

7.1 Prázdný železniční vagón o hmotnosti $1 \cdot 10^4$ kg se pohybuje rychlostí $0{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ po vodorovné trati a srazí se s naloženým vagónem o hmotnosti $2 \cdot 10^4$ kg stojícím v klidu s uvolněnými brzdami. Jsou-li oba vozy při nárazu spolu spojeny, najděte **a)** Jejich rychlost υ po srážce a úbytek kinetické energie. **b)** Jakou rychlostí υ_2 by se musel pohybovat naložený vagón, aby oba zůstaly po srážce v klidu?

$m_1 = 1 \cdot 10^4\ \mathrm{kg}$; $\upsilon_1 = 0{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $m_2 = 2 \cdot 10^4\ \mathrm{kg}$. $\upsilon, \upsilon_2 = ?$

a) Zákon zachování celkové hybnosti

$$m_1 \vec{\upsilon}_1 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon} \Rightarrow \vec{\upsilon} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon} \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}_1,\ \upsilon = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1},\ \upsilon = 0{,}27\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Úbytek **kinetické** energie (tato část mechanické energie soustavy se přemění ve vnitřní energii částic)**:**

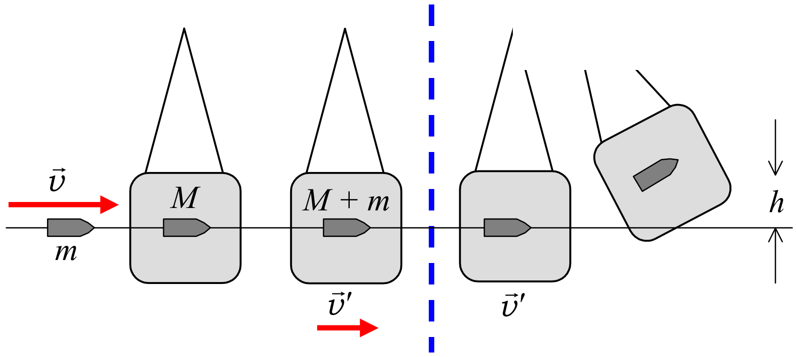
$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 \Rightarrow \Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2\upsilon_1^2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta E_\mathrm{k} = \frac{m_1 m_2 \upsilon_1^2}{2(m_1 + m_2)}},\ \Delta E_\mathrm{k} = 2\,700\ \mathrm{J}.$$

b) $$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{\upsilon}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{\upsilon}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon}_2 \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}_1,\ \upsilon_2 = \frac{m_1}{m_1}\upsilon_1},\ \upsilon_2 = 0{,}45\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

7.2 Střela o hmotnosti $m = 0{,}02$ kg byla vystřelena do balistického kyvadla o hmotnosti $M = 5$ kg. Po náraze se hmotný střed kyvadla zvedl o $h = 0{,}1$ m. Určete rychlost střely (před nárazem).

$m = 0{,}02\ \mathrm{kg}$; $M = 5\ \mathrm{kg}$; $h = 0{,}1\ \mathrm{m}$; $\upsilon = ?$



Zákon zachování hybnosti po vniknutí střely do kyvadla:

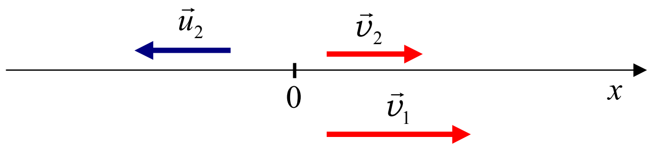
$$m\upsilon = (M + m)\upsilon' \Rightarrow \upsilon = \frac{M + m}{m}\upsilon'$$

Zákon zachování energie soustavy (střela + kyvadlo) po srážce:

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2=(M+m)gh \Rightarrow v'=\sqrt{2gh} \Rightarrow \boxed{v=\frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}}$$

7.3 Chlapec, opírající se o zeď, hodil kámen vodorovně rychlostí o velikosti $v_1=5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Hmotnost kamene je $m=1\ \mathrm{kg}$, hmotnost chlapce je $M=49\ \mathrm{kg}$.
a) Jakou rychlost by udělil kameni při vrhu stejnou silou a ve stejném směru, kdyby stál na bruslích na hladkém ledě? **b)** Jaká bude relativní rychlost kamene vůči chlapci v prvním a ve druhém případě?

$v_1=5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $m=1\ \mathrm{kg}$; $M=49\ \mathrm{kg}$; $v_2, u, P=?$



Rychlost chlapce opírajícího se o stěnu po vrhu je nulová, je to tedy vektor $\vec{u}_1(0)$. Práce W vykonaná chlapcem je rovna kinetické energii kamene; je tedy

$$W=\frac{1}{2}mv_1^2.$$

a) Ze zákona zachování celkové hybnosti soustavy [chlapec (na bruslích) + kámen] dostaneme pro (složku $u_{2,x}$) rychlosti $\vec{u}_2$ chlapce

$$m\vec{v}_2+M\vec{u}_2=\vec{0} \Rightarrow u_{2,x}=-\frac{m}{M}v_2\ ,\ \vec{u}_2 \uparrow\downarrow \vec{v}_2\ ,\ u_2=\frac{m}{M}v_2\,,\ \vec{u}_2\left(-\frac{m}{M}v_2\right).$$

Stejná práce $W=\frac{1}{2}mv_1^2$ chlapce (působícího stejnou silou) je nyní rovna součtu kinetické energie kamene a chlapce

$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}m_1v_2^2+\frac{1}{2}Mu_2^2.$$

Dosadíme-li do vztahu pro energii za rychlost u_2 ze zákona zachování hybnosti, dostaneme pro rychlost $\vec{v}_2$ kamene

$$mv_1^2=m_1v_2^2+M\frac{m^2}{M^2}v_1^2=m_1v_2^2+\frac{m^2}{M}v_1^2 \Rightarrow \boxed{v_2=v_1\sqrt{\frac{M}{M+m}}}\ ,\ v_2<v_1\ ,$$

$$\vec{v}_2\left(v_1\sqrt{\frac{M}{M+m}}\right).$$

Pro rychlost chlapce pak platí

$$u_2=\frac{m}{M}v_2=v_1\frac{m}{M}\sqrt{\frac{M}{M+m}} \Rightarrow u_2=v_1\sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)}}\ ,\ \vec{u}_2\left(-v_1\sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)}}\right).$$

b) Relativní rychlost kamene vůči chlapci je v prvním případě $\vec{v}_{\mathrm{rel},1}=\vec{v}_1-\vec{u}_1$. Do této vektorové rovnice musíme dosadit složky vektorů $\vec{v}_1(v_1)$ a $\vec{u}_1(0)$. Pro složku $v_{\mathrm{rel,A},x}$ relativní rychlosti tedy dostáváme

$$v_{\mathrm{rel},1,x} = v_1 \Rightarrow \boxed{v_{\mathrm{rel},1} = v_1}$$

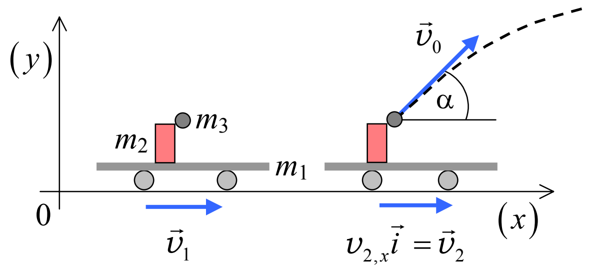
Ve druhém případě platí $\vec{v}_{\mathrm{rel},2} = \vec{v}_2 - \vec{u}_2$; $\Rightarrow$

$$v_{\mathrm{rel},2,x} = v_1\sqrt{\frac{M}{M+m}} + v_1\sqrt{\frac{m^2}{M\left(M+m\right)}} = v_1\sqrt{\frac{M}{M+m}}\left(1+\frac{m}{M}\right) =$$

$$= v_1\sqrt{\frac{M}{M+m}}\left(\frac{M+m}{M}\right) \Rightarrow v_{\mathrm{rel},2,x} = v_1\sqrt{\frac{M+m}{M}}\,,\ \boxed{v_{\mathrm{rel},2} = v_1\sqrt{\frac{M+m}{M}}}$$

7.4 Na vozíku $(10\ \mathrm{kg})$, pohybujícím se rychlostí $2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, stojí chlapec $(40\ \mathrm{kg})$. Chlapec vyhodí kámen $(1\ \mathrm{kg})$ ve směru pohybu vozíku pod elevačním úhlem 60° rychlostí $v_0 = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ vzhledem k zemskému povrchu. Jaká bude po vyhození kamene rychlost vozíku? Třecí sílu a odpor vzduchu zanedbáváme.

$m_1 = 10\ \mathrm{kg}$; $m_2 = 40\ \mathrm{kg}$; $m_3 = 1\ \mathrm{kg}$; $v_1 = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $v_0 = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $\alpha = 60^\circ$; $v_2 = ?$

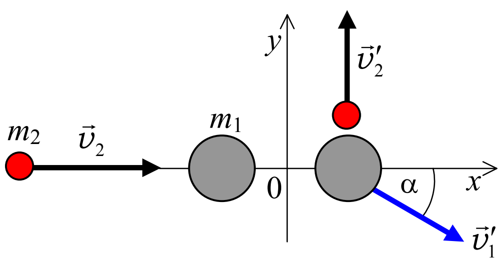


Platnost zákona zachování celkové hybnosti soustavy vyžaduje aby **první** složka celkové hybnosti soustavy po vrhu byla rovna první složce celkové hybnosti před vrhem (pohyb vozíku s chlapcem ve směru osy y není možný). Platí tedy

$$p_x = p'_x \Rightarrow \left(m_1 + m_2 + m_3\right)v_1 = \left(m_1 + m_2\right)v_{2,x} + m_3 v_0 \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{v_{2,x} = \frac{\left(m_1 + m_2 + m_3\right)v_1 - m_3 v_0 \cos\alpha}{m_1 + m_2}}\ ;\ v_2 = 1{,}94\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

7.5 Kámen hmotnosti $m_1 = 0{,}1\ \mathrm{kg}$ leží na vodorovné, dokonale hladké rovině. Střela o hmotnosti $m_2 = 0{,}0025\ \mathrm{kg}$ letící vodorovně rychlostí $v_2 = 400\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ narazí na kámen a odrazí se vodorovně v pravém úhlu ke svému původnímu směru rychlostí $v'_2 = 300\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Vypočtěte velikost a směr rychlosti $\vec{v}'_1$ kamene po nárazu a impuls $\vec{I}$, který střela kameni udělí.



$m_1 = 0{,}1\ \mathrm{kg}$; $m_2 = 0{,}0025\ \mathrm{kg}$;
$v_2 = 400\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $v'_2 = 300\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $\vec{v}'_1, \vec{I} = ?$

Kámen a střelu považujeme za dynamicky izolovanou SHB.

$$\vec{v}_2 \uparrow\uparrow \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_2 = 400\vec{i}\,;$$

$$\vec{v}'_2 \uparrow\uparrow \vec{j} \Rightarrow \vec{v}'_2 = 300\vec{j}\,;\ \vec{v}'_1 = v'_{1x}\vec{i} + v'_{1y}\vec{j}\,.$$

Zákon zachování celkové hybnosti SHB

$$m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \Rightarrow \vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}'_2\right) \Rightarrow$$

$$\upsilon'_{1,x} = \frac{m_2}{m_1}\left(\upsilon_{2,x} - \upsilon'_{2,x}\right) \Rightarrow \upsilon'_{1,x} = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}};\ \upsilon'_{1,y} = \frac{m_2}{m_1}\left(\upsilon_{2,y} - \upsilon'_{2,y}\right) \Rightarrow \upsilon'_{1,y} = 7{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

$$\boxed{\vec{\upsilon}'_1 = 10\vec{i} - 7{,}5\vec{j}\ ;\ \upsilon'_1 = 12{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}\quad \alpha = \mathrm{arctg}\left|\frac{\upsilon'_{1,y}}{\upsilon'_{1,x}}\right| \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\,0{,}75 \Rightarrow \alpha \doteq 37^\circ.$$

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t = m_1\vec{\upsilon}'_1 \Rightarrow I = m_1\upsilon'_1 \Rightarrow \boxed{I = 1{,}25\ \mathrm{Ns}}$$

7.6 Člověk v loďce A, která i s ním má hmotnost $m_1 = 300\ \mathrm{kg}$, táhne za lano silou $F = 100\ \mathrm{N}$. Druhý konec lana je přivázán **a)** ke stromu, **b)** k loďce B o hmotnosti $m_2 = 200\ \mathrm{kg}$. Jakou rychlost bude mít loďka A v obou případech na konci třetí sekundy pohybu? Jaký je v tomto okamžiku výkon člověka a jakou práci vykonal za tři sekundy? Hmotnost lana a odpor vody proti pohybu loděk zanedbáváme.
[**a)** $\upsilon_1 = 1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $W = 150\ \mathrm{J}$; $P = 100\ \mathrm{W}$ **b)** $\upsilon_1 = 1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $W = 375\ \mathrm{J}$; $P = 250\ \mathrm{W}$]

$$m_1 = 300\ \mathrm{kg};\ F = 100\ \mathrm{N};\ m_2 = 200\ \mathrm{kg};\ t = 3\ \mathrm{s};\ \upsilon_1, W, P = ?$$

a) Reakce stromu, co do velikosti stejná jako síla člověka $\vec{F}$, uděluje loďce A (i sobě samému) stálé zrychlení $a = F/m_1$. Pro okamžitou rychlost loďky A tedy platí

$$\upsilon_1 = at \Rightarrow \boxed{\upsilon_1(t) = \frac{F}{m_1}t};\ \upsilon_1(3) = 1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Práce člověka za čas t je rovna přírůstku kinetické energie loďky

$$W_{(\mathrm{a})} = E_{\mathrm{kA}} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_1\frac{F^2t^2}{m_1^2} \Rightarrow \boxed{W_{(\mathrm{a})}(t) = \frac{F^2t^2}{2m_1}};\ W_{(\mathrm{a})}(3) = 150\ \mathrm{J}.$$

Okamžitý výkon v okamžiku t

$$P_{(\mathrm{a})} = F\upsilon_1 = F\frac{Ft}{m_1} \Rightarrow \boxed{P_{(\mathrm{a})}(t) = \frac{F^2t}{m_1}};\ P_{(\mathrm{a})}(3) = 100\ \mathrm{W}.$$

b) Působí-li člověk na lano stejnou tahovou sílu, jako v případě **a)**, odpovídá lano stejnou reakcí – zrychlení loďky A je tedy stejné, jako v předchozím případě. Proto je stejná i okamžitá rychlost loďky A na konci 3. sekundy jejího pohybu. Lano je tentokrát připevněno k loďce B.

K určení rychlosti loďky B můžeme použít zákon zachování celkové hybnosti pro dynamicky izolovanou soustavu $(\mathrm{A}+\mathrm{B})$

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 = \frac{m_1}{m_2}\frac{F}{m_1}t \Rightarrow \upsilon_2(t) = \frac{F}{m_2}t.$$

Práce člověka je nyní rovna přírůstku kinetické energie obou loděk

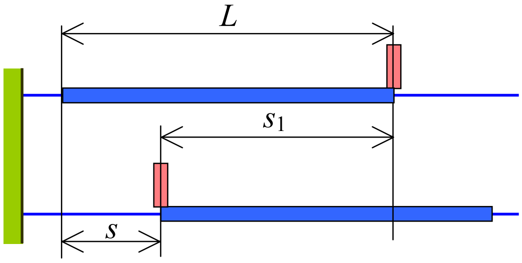
$$W_{(\mathrm{b})} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\frac{F^2}{m_1^2}t^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{F^2}{m_2^2}t^2 \Rightarrow \boxed{W_{(\mathrm{b})}(t) = F^2\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}t^2}$$

Okamžitý výkon:

$$P_{(\mathrm{b})} = P_1 + P_2 = F\upsilon_1 + F\upsilon_2 = F(\upsilon_1 + \upsilon_2) = F\left(\frac{F}{m_1}t + \frac{F}{m_2}t\right) \Rightarrow \boxed{P_{(\mathrm{b})}(t) = F^2\frac{m_1+m_2}{m_1\,m_2}t}$$

$W_{(b)}(3) = 375\ \mathrm{J} > W_{(a)}(3)$, $P_{(b)}(3) = 250\ \mathrm{W} > P_{(a)}(3)$.

7.7 Na klidné vodní hladině stojí loďka o délce L a hmotnosti M. Na zádi loďky stojí člověk hmotnosti m. O jakou vzdálenost vzhledem ke břehu se posune loďka, přejde-li člověk na její příď? Odpor vody proti pohybu loďky zanedbáváme.



L ; M ; m . $s = ?$

Řešení A

Předpokládejme, že člověk přejde ze zádi na příď rovnoměrně rychlostí $\vec{u} = \overrightarrow{\text{konst.}}$ vzhledem ke břehu. Pro **zachování** (původně nulové) **celkové hybnosti** soustavy **člověk** + **loďka** se během pohybu člověka musí pohybovat i loďka vzhledem ke břehu rovnoměrně rychlostí $\vec{\upsilon} \uparrow\downarrow \vec{u}$ a během přesunu člověka urazí (hledanou) dráhu $s = \upsilon t$. Připomeňme, že k přechodu člověka ze zádě na příď stačí člověku urazit pouze dráhu $s_1 < L$, neboť loďka mu jede **vstříc**.

Rychlost υ loďky určíme ze zákona zachování celkové hybnosti soustavy

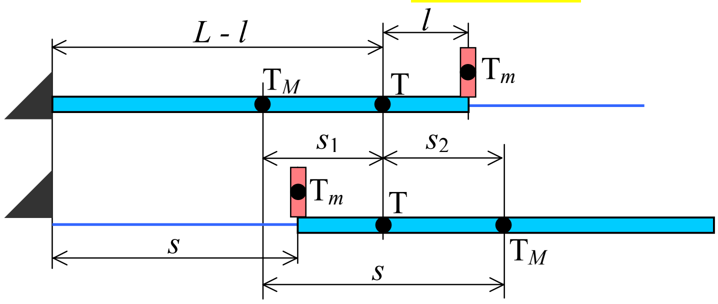
$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m\vec{u} + M\vec{\upsilon} = \vec{0} \Rightarrow mu - M\upsilon = 0 \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{m}{M}u\,.$$

Dobu t pohybu loďky i člověka určíme ze vztahu

$$t = \frac{s_1}{u} = \frac{L-s}{u}; \; s = \upsilon t = \frac{m}{M}u\frac{L-s}{u} \Rightarrow s = \frac{m}{M}(L-s) \Rightarrow \quad \boxed{s = \frac{mL}{M+m}}$$

Řešení B

Vzhledem k nulové výslednici vnějších sil (vektorového součtu tíhové síly působící na člověka a loďku a hydrostatické vztlakové síly) tvoří člověk a loďka dynamicky **izolovanou** soustavu - platí věta o zachování pohybu hmotného středu – jeho relativního **klidu** v soustavě spojené s břehem $\left(\vec{r}_{\mathrm{T}} = \overrightarrow{\text{konst.}}\right)$.



Poloha HS soustavy (člověk a loďka) vzhledem k břehu se tedy nemění. V **soustavě HS** – s počátkem v bodě T ($\vec{r}\,'_m$ – polohový vektor HS člověka, $\vec{r}\,'_M$ - polohový vektor hmotného středu loďky) platí **stále**

$$\vec{r}\,'_{\mathrm{T}} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{r}\,'_m + M\vec{r}\,'_M = \vec{0} \;\; ; \; \vec{r}\,'_m \uparrow\downarrow \vec{r}\,'_M \Rightarrow -mr'_m + Mr'_M = 0\,.$$

Před přechodem je tedy ($r'_{m1} = l\,, r'_{M1} = s_1$): $\; ml - Ms_1 = 0 \Rightarrow \; s_1 = \dfrac{m}{M}l$,

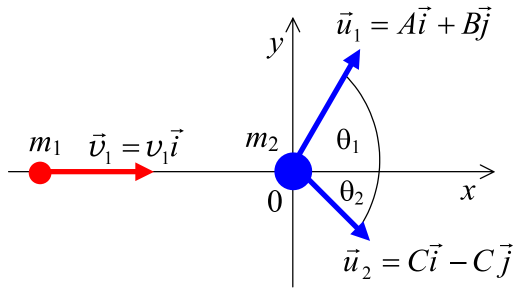
po přechodu je ($r'_{m2} = L - l - s\,, r'_{M2} = s_2$): $\; Ms_2 - m(L-l-s) = 0 \Rightarrow s_2 = \dfrac{m(L-l-s)}{M}$.

Pro přesun loďky vzhledem k břehu tedy platí $s = s_1 + s_2 \Rightarrow$

$$s = \frac{m}{M} + \frac{m(L-l-s)}{M} = \frac{ml + mL - ml - ms}{M} = \frac{mL - ms}{M} \Rightarrow$$

$$Ms + ms = mL \Rightarrow \boxed{s = \frac{m}{M+m}L}$$

7.8 Částice hmotnosti m_1 a rychlosti $\vec{v}_1$ se dokonale pružně srazí s klidnou částicí hmotnosti $m_2 = 3m_1$. Po srážce se druhá částice pohybuje pod úhlem $\theta_2 = 45^\circ$ vzhledem k původnímu směru pohybu první částice. Najděte úhel θ_1 odklonění první částice a rychlosti $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ částic po srážce.



m_1, $m_2 = 3m_1$; $\vec{v}_1$; $v_2 = 0$; $E_\text{k} = \text{konst.}$, $\theta_2 = 45^\circ$. $\theta_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2 = ?$

Ze zadání úlohy plyne pro vektory rychlosti obou částic před a po srážce

$$\vec{v}_1 = v_1\vec{i};\ v_2 = 0;$$

$$\vec{u}_1 = A\vec{i} + B\vec{j};\ \vec{u}_2 = C\vec{i} - C\vec{j};\ C > 0.$$

Zákon zachování celkové hybnosti soustavy

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \Rightarrow m_1 v_1 \vec{i} = m_1\left(A\vec{i} + B\vec{j}\right) + 3m_1\left(C\vec{i} - C\vec{j}\right) \Rightarrow$$

$$v_1\vec{i} = (A + 3C)\vec{i} + (B - 3C)\vec{j} \Rightarrow A + 3C = v_1;\ B - 3C = 0 \Rightarrow A = v_1 - 3C;\ B = 3C.$$

Zákon zachování celkové kinetické energie soustavy při dokonale pružné srážce

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1\left(A^2 + B^2\right) + \frac{1}{2}3m_1\left(C^2 + C^2\right) \Rightarrow$$

$$v_1^2 = A^2 + B^2 + 6C^2 \Rightarrow v_1^2 = (v_1 - 3C)^2 + 9C^2 + 6C^2 \Rightarrow C = \tfrac{1}{4}v_1;\ A = \tfrac{1}{4}v_1;\ B = \tfrac{3}{4}v_1$$

Pro rychlosti částic **po srážce** tedy dostáváme

$$\boxed{\vec{u}_1 = \tfrac{1}{4}v_1\vec{i} + \tfrac{3}{4}v_1\vec{j};\ \vec{u}_2 = \tfrac{1}{4}v_1\vec{i} - \tfrac{1}{4}v_1\vec{j}}$$

Úhel θ_1 určíme ze složek vektoru $\vec{u}_1$: $\operatorname{tg}\theta_1 = u_{1y}/u_{1x} = 3 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = 71{,}6^\circ}$

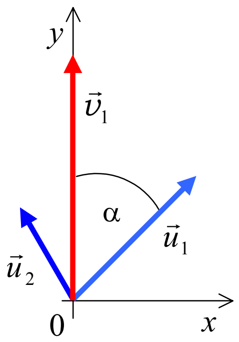
7.9 Těleso $(m_1 = 1\ \text{kg})$, pohybující se na sever rychlostí $v_1 = 6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ se (nepružně) srazí s klidným tělesem, jehož hmotnost je $m_2 = 2\ \text{kg}$. Po srážce se první těleso pohybuje pod úhlem 45° vzhledem ke svému původnímu směru – na severovýchod rychlostí $u_1 = 2{,}82\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. **a)** Jaká je rychlost $\vec{u}_2$ druhého tělesa po srážce? **b)** Jaká část kinetické energie těles se při srážce přemění v jejich vnitřní energii? **c)** O jaký úhel se odkloní po srážce první těleso v soustavě hmotného středu?

$m_1 = 1\ \text{kg}$; $m_2 = 2\ \text{kg}$; $v_1 = 6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 45^\circ$;
$u_1 = 2{,}82\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_2 = 0$. $u_2, \Delta E_\text{k}, \alpha' = ?$

Tělesa považujeme za dynamicky izolovanou soustavu hmotných bodů. Rychlosti těles **před** srážkou jsou (všechny souřadnice rychlostí jsou v $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

$$\upsilon_{1x} = 0;\ \upsilon_{1y} = 6 \Rightarrow \vec{\upsilon}_1 = 6\vec{j};\ \vec{\upsilon}_2 = \vec{0}$$

a) Rychlosti těles po srážce:



$$u_{1x} = u_{1y} = u_1 \sin\alpha \Rightarrow u_{1x} = u_{1y} = 2{,}82\ \sin 45^\circ \doteq 2 \Rightarrow$$

$$\vec{u}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Ze zákona zachování celkové hybnosti soustavy dostaneme

$$m_1\vec{\upsilon}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{m_1}{m_2}\left(\vec{\upsilon}_1 - \vec{u}_1\right);$$

$$u_{2x} = \frac{m_2}{m_1}\left(\upsilon_{1x} - u_{1x}\right) \Rightarrow u_{2x} = -1;$$

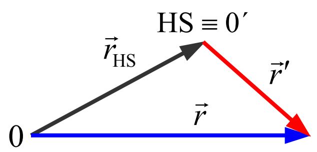
$$u_{2y} = \frac{m_2}{m_1}\left(\upsilon_{1y} - u_{1y}\right) \Rightarrow u_{2y} = 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{u}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j};\ u_2 = \sqrt{5} \doteq 2{,}24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

b) Úbytek kinetické energie při nepružné (nedokonale pružné) srážce (tato část mechanické energie soustavy se při tomto typu srážky přemění ve vnitřní energii částic)**:**

$$\Delta E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k} - E'_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\left(m_1\upsilon_1^2 - m_1\upsilon_1'^2 - m_2\upsilon_2'^2\right) \Rightarrow \boxed{\Delta E_\mathrm{k} \doteq 9\ \mathrm{J}}$$

c) Řešení v souřadnicové soustavě hmotného středu:



Transformace souřadnic a složek vektorů:

$$\vec{r}_{\mathrm{HS}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{\mathrm{HS}} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2};$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{\mathrm{HS}} + \vec{r}' \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{HS}};\ \vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_{\mathrm{HS}}.$$

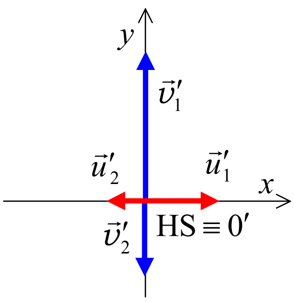
Rychlost pohybu hmotného středu **před** srážkou:

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{HS}} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2};\ \ \vec{\upsilon}_1 = 6\vec{j};\ \vec{\upsilon}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{\mathrm{HS}} = 2\vec{j}.$$

Rychlosti jednotlivých těles v soustavě hmotného středu **před** srážkou:

$$\vec{\upsilon}'_1 = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_{\mathrm{HS}},\ \ \vec{\upsilon}_1 = 6\vec{j} \Rightarrow \vec{\upsilon}'_1 = 4\vec{j};\ \vec{\upsilon}'_2 = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_{\mathrm{HS}},\ \ \vec{\upsilon}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{\upsilon}'_2 = -2\vec{j}.$$

Rychlost hmotného středu **po** srážce:



$$\vec{u}_{\mathrm{HS}} = \frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1 + m_2};\ \vec{u}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j};\ \vec{u}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_{\mathrm{HS}} = 2\vec{j} = \vec{\upsilon}_{\mathrm{HS}}.$$

Tento výsledek je potvrzením platnosti věty o zachování pohybu hmotného středu dynamicky izolované soustavy.

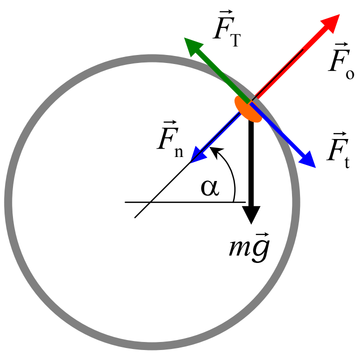
Rychlosti jednotlivých těles v soustavě hmotného středu **po** srážce $\left(\vec{u}_{\mathrm{HS}} = 2\vec{j}\right)$:

$$\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{u}_{\mathrm{HS}}\,;\ \vec{u}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} \ \Rightarrow \vec{u}_1' = 2\vec{i}\,,$$

$$\vec{u}_2' = \vec{u}_2 - \vec{u}_{\mathrm{HS}}\,;\ \vec{u}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} \ \Rightarrow \vec{u}_2' = -\vec{i}\,.$$

Odchylka pohybu prvního tělesa po srážce v soustavě hmotného středu je 90°.

7.10 Jakou minimální rychlostí se musí kolem vodorovné osy souměrnosti otáčet dutý válec s vnitřním poloměrem R, aby se malé částice uvnitř válce pohybovaly spolu s válcem a neklouzaly po jeho vnitřní stěně? Statický součinitel třecí síly mezi částicemi a vnitřní stěnou válce je $k = 1$.



Třecí síla F_{T} mezi částicí a stěnou válce roste s rozdílem

$$F_{\mathrm{o}} - F_{\mathrm{n}} = m\omega^2 R - mg\sin\alpha$$

setrvačné odstředivé síly F_{o} a normálové složky F_{n} tíhy částice; velikost třecí síly je

$$F_{\mathrm{T}} = k\left(m\omega^2 R - mg\sin\alpha\right).$$

Podmínkou pro to, aby částice neklouzaly, je

$$F_{\mathrm{T}} \geq F_{\mathrm{t}} \Rightarrow \ k\left(m\omega^2 R - mg\sin\alpha\right) \geq mg\cos\alpha\,.$$

Pro $k = 1$ dostaneme $\omega^2 \geq \dfrac{g}{R}\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right)$. Velikost $\omega_{\min}$ minimální rychlosti otáčení válce určíme ze vztahu

$$\omega_{\min}^2 = \left[\frac{g}{R}\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right)\right]_{\max}.$$

Výraz v hranaté závorce dosahuje maxima pro $\alpha = (\pi/4) + 2n\pi$; hodnota maxima je $g\sqrt{2}/R$. Dostáváme tedy

$$\boxed{\omega_{\min} = \left(\frac{g\sqrt{2}}{R}\right)^{1/2}}$$