6. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

6.1 Péro v samočinném zavírači dveří se působením síly o velikosti 25 N prodlouží o 15 cm. Jaká je potenciální energie péra, jestliže je při plném otevření dveří prodlouženo o 45 cm?

$$F = 25\ \mathrm{N};\ \Delta y = 1{,}5\cdot 10^{-1}\ \mathrm{m};\ y_{\max} = 4{,}5\cdot 10^{-1}\ \mathrm{m}.\ E_{\mathrm{p}} = ?$$

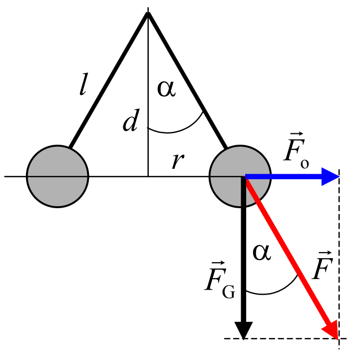
$$F = k\Delta y \Rightarrow k = F/\Delta y\ ;\ E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} k\, y_{\max}^2 \Rightarrow \boxed{E_{\mathrm{p}} = \frac{F}{2\Delta y} y_{\max}^2},\ E_{\mathrm{p,\,max}} = 16{,}9\ \mathrm{J}.$$

6.2 Kolikrát za sekundu musíme otáčet kuličkou na provázku délky 1 m aby opisovala kružnici ve svislé rovině?

$$l = 1\ \mathrm{m};\ g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}};\ f = ?$$

$$F_{\mathrm{o}} = F_{\mathrm{G}} \Rightarrow ma_{\mathrm{o}} = mg \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{l} = l\omega^2 = l4\pi^2 f^2 = g \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

6.3 Koule odstředivého regulátoru konají 50 oběhů za minutu. V jaké svislé vzdálenosti od vrcholu je rovina jejich oběhu?



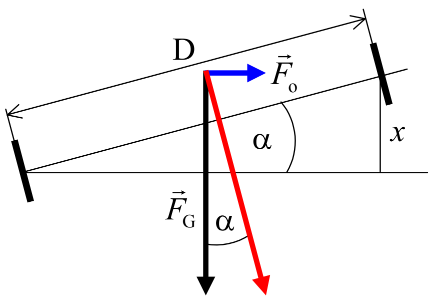
$$f = 5/6\ s^{-1};\ g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}};\ d = ?$$

$$\frac{F_{\mathrm{o}}}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{ma_{\mathrm{o}}}{mg} = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{r4\pi^2 f^2}{g} = \frac{r}{d} \Rightarrow$$

$$\boxed{d = \frac{g}{4\pi^2 f^2}}$$

6.4 Vlak projíždí zatáčkou o poloměru 400 m rychlostí 45 km·h^{-1}. O kolik centimetrů musí být vnější kolejnice výše než vnitřní, má-li být výslednice tíhy vlaku a setrvačné odstředivé síly kolmá k rovině kolejnic? Vzdálenost kolejnic je 1,515 m.

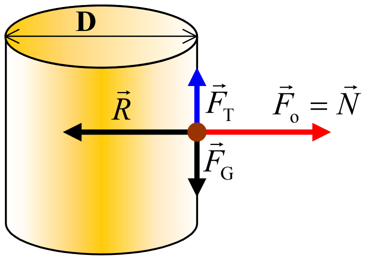
$$R = 4\cdot 10^2\mathrm{m};\ \upsilon = 45\ \mathrm{km\cdot h^{-1}};\ g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}};\ x = ?$$



$$\frac{x}{D} = \sin\alpha\ ;\ \frac{x}{D\sqrt{1-\frac{x^2}{D^2}}} = \frac{\upsilon^2}{Rg} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{D^2 - x^2}} = \frac{\upsilon^2}{Rg} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{\upsilon^2 D}{\sqrt{\upsilon^4 + R^2 g^2}}},\ x = 6\ \mathrm{cm}.$$

6.5 Jednou z cirkusových atrakcí je jízda na motocyklu po vnitřní straně válcové plochy se svislou osou. Určete minimální rychlost motocyklu, je-li průměr válcové plochy 18 m a součinitel třecí síly má hodnotu 0,4. Motocykl s jezdcem považujeme za hmotný bod.



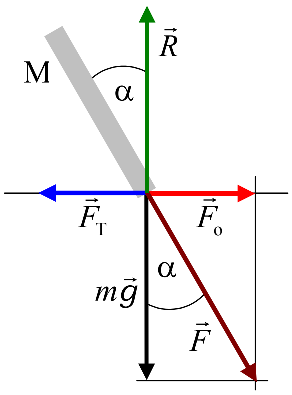
$D =$ 18 m; $f =$ 0,4; $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $v_{\min} = ?$

Podmínka rovnováhy: $\vec{F}_G + \vec{F}_T + \vec{F}_o + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow$

$$F_T = F_G \Rightarrow f\,F_o = F_G \Rightarrow f\,\frac{2mv_{\min}^2}{D} = mg \Rightarrow$$

$$\boxed{v_{\min} = \sqrt{\frac{Dg}{2f}}},\quad {}^{1}.$$

6.6 Jakou maximální rychlostí smí jet po vodorovné dráze motocyklista, opisuje-li oblouk o poloměru 90 m a má-li součinitel třecí síly hodnotu 0,4? O jaký úhel se přitom musí odklonit od svislé roviny?



$R =$ 90 m; $f = 0{,}4$; $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $v, \alpha = ?$

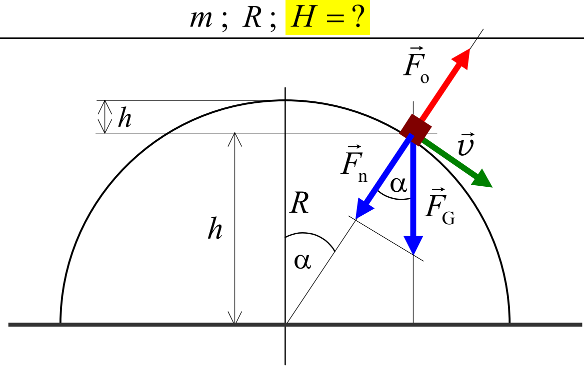
Při náklonu v zatáčce působí motocyklista na vozovku vodorovnou silou, jejíž velikost je rovna velikosti setrvačné odstředivé síly $F_o = mv/R^2$. Aby nepodklouzl, musí být tato síla **menší** nebo nanejvýš **rovna** konstantní velikosti třecí síly $F_T = f\,mg$. Limitní případ maximální rychlosti tedy nastane pro

$$\vec{F}_o = -\vec{F}_T \Rightarrow \frac{mv^2}{R} = fmg \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{fRg}},\quad v = 19\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_o}{F_G} = \frac{mv^2}{Rmg} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{v^2}{Rg} \Rightarrow \boxed{\alpha = \mathrm{arctg}\,f},\quad \alpha = 21{,}8^\circ.$$

6.7 Malé tělísko o hmotnosti m začne klouzat bez tření z nejvyššího bodu polokoule o poloměru R. V jaké výšce nad vodorovnou rovinou se tělísko odtrhne od povrchu polokoule?

m; R; $H = ?$



Dostředivou silou, udržující pohybující se tělísko na polokouli, je výslednice $\vec{F}$ síly $\vec{F}_n$ (normálové složky tíhové síly $\vec{F}_G$) o velikosti $F_n = mg\cos\alpha$ a **setrvačné** odstředivé síly $\vec{F}_o$ o velikosti $F_o = mv^2/R$. Platí tedy

$$\vec{F}=\vec{F}_\mathrm{n}+\vec{F}_\mathrm{o};\ \vec{F}_\mathrm{n}\uparrow\downarrow\vec{F}_\mathrm{o}\Rightarrow\quad F=F_\mathrm{n}-F_\mathrm{o}\Rightarrow\ F=mg\cos\alpha+m\frac{v^2}{R}.$$

K odtržení tělíska od polokoule dojde v okamžiku, kdy $F=0\Rightarrow$ $\cos\alpha=v^2/Rg$.

Klesne-li tělísko o výšku h je úbytek jeho potenciální energie roven přírůstku jeho energie kinetické $\Rightarrow$ $mgh=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v^2=2hg$. V okamžiku odtržení je tedy

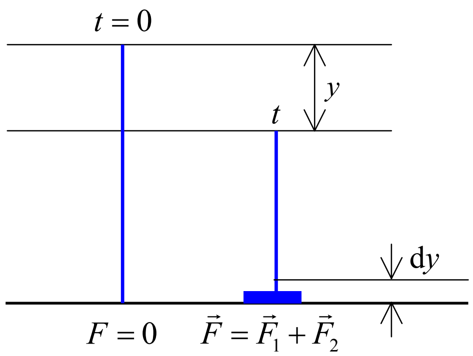
$$\cos\alpha=\frac{v^2}{Rg}=\frac{2hg}{Rg}=\frac{2h}{R}.$$

Z obrázku je zřejmé, že v okamžiku odtržení je také možno psát $\cos\alpha=\dfrac{R-h}{R}$.

Srovnáním obou vztahů dostáváme

$$\frac{2h}{R}=\frac{R-h}{R}\Rightarrow h=\frac{R}{3}\Rightarrow\quad\boxed{H=\frac{2}{3}R}$$

6.8 Homogenní řetěz, jehož jednotková délka má hmotnost τ, visí svisle tak, že se spodním koncem dotýká stolu. Je-li jeho druhý konec uvolněn, řetěz padá. Jakou silou působí řetěz na stůl, když urazil délku y?



$\tau;\ y;\ F=?$

$F=F_1+F_2$; $F_1=y\tau g$ – velikost tíhy řetězu ležícího na stole v okamžiku t. Element $\mathrm{d}y$ řetězu, pohybující se rychlostí v_y, ztratí při dopadu na stůl během časového intervalu $\mathrm{d}t$ veškerou svoji hybnost a udělí tak stolu silový impuls

$$F_2\mathrm{d}t=\tau\,\mathrm{d}y\,v_y\Rightarrow F_2=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\tau v_y=v_y^2\tau.$$

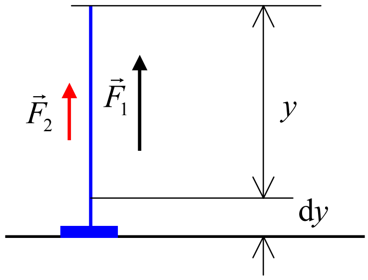
Pro rychlost v_y volného pádu z výšky y platí $v_y=\sqrt{2gy}$, takže $F_2=2y\tau g$. Celková síla, kterou řetěz působí na stůl po uražení dráhy y, je tedy

$$F=y\tau g+2y\tau g\Rightarrow\ \boxed{F=3y\tau g}$$

6.9 Homogenní provaz, jehož jednotková délka má hmotnost τ, leží svinut na vodorovném hladkém stole. Jeden jeho konec je zvedán rychlostí v_0 svisle vzhůru. Jak velkou silou je nutno táhnout vzhůru v okamžiku, kdy je horní tažený konec ve výšce y nad stolem?

$\tau;\ v_0;\ y;\ F=?$

$F=F_1+F_2$; $F_1=y\tau g$ – velikost tíhy provazu o délce y. $\vec{F}_2$ – síla, kterou je nutno působit na element $\mathrm{d}y$ provazu, aby byl uveden z klidu do pohybu o rychlosti v_0. Pro impuls této síly platí



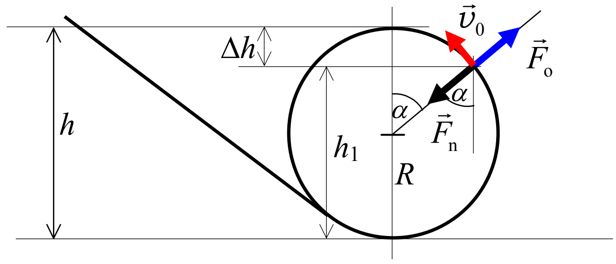
$$F_2 \mathrm{d}t = \tau \mathrm{d}y\, \upsilon_0 \Rightarrow F_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tau \upsilon_0 = \upsilon_0^2 \tau .$$

Pro celkovou „tažnou" sílu tedy platí

$$F = F_1 + F_2 = y\tau g + \upsilon_0^2 \tau \Rightarrow \boxed{F = \left(y + \frac{\upsilon_0^2}{g} \right) \tau g}$$

6.10 Malé tělísko o hmotnosti m začne klouzat bez tření z výšky h po nakloněné rovině přecházející ve válcovou plochu o poloměru R. V jaké výšce se tělísko odtrhne od válcové plochy, je-li $h = 2R$? Jaké jsou další možnosti?

$m\,;\ h\,;\ R\,;\ h = 2R\,;\ h_1 = ?$



K odtržení od válcové plochy dojde v okamžiku, kdy **rostoucí** normálová složka tíhy F_n dosáhne velikosti setrvačné odstředivé síly F_o $\Rightarrow$

$$F_\text{n} = F_\text{o} \Rightarrow mg \cos\alpha = \frac{m\upsilon_0^2}{R} .$$

Ve výšce, která je o Δh menší než původní (**klidová**) výška $h(=2R)$, je kinetická energie tělíska rovna úbytku jeho potenciální tíhové energie $\Rightarrow$

$$\tfrac{1}{2} m\upsilon_0^2 = mg\,\Delta h \;\Rightarrow\; \upsilon_0^2 = 2\Delta h\, g .$$

Z obrázku je patrné, že $\cos\alpha = \dfrac{R - \Delta h}{R}$ $\Rightarrow$

$$F_\text{n} = F_\text{o} \Rightarrow mg \frac{R - \Delta h}{R} = \frac{m}{R} 2\Delta h g \;\Rightarrow\; \Delta h = R/3 \Rightarrow\; h_1 = 2R - \Delta h \Rightarrow \boxed{h_1 = \frac{5}{3} R}$$

Další možnosti

1. Výška h je dána obecně (bez vazby na poloměr R)

$$\frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = mg\left(h - h_1\right) \wedge mg \cos\alpha = \frac{m\upsilon_0^2}{R} \wedge \cos\alpha = \frac{h_1 - R}{R} \;\Rightarrow\; \upsilon_0^2 = 2g\left(h - h_1\right) \Rightarrow$$

$$\frac{h_1 - R}{R} = \frac{2\left(h - h_1\right)}{R} \;\Rightarrow\; \boxed{h_1 = \frac{2h + R}{3}}$$

2. Jaká musí být výška h, aby těleso vykonalo celou obrátku po válcové ploše a nespadlo?

Těleso musí v tomto případě dosáhnout alespoň nejvyššího bodu válcové plochy. To znamená, že $h_1 = 2R;\ \alpha = 0$. S ohledem na předchozí výsledky tedy platí

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg(h-2R) \wedge mg = \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow v_0^2 = 2g(h-2R) \wedge v_0^2 = Rg \Rightarrow \boxed{h = \frac{5}{2}R}$$

6.11 Rychlost tělesa (hmotného bodu) v nejnižším bodě nakloněné roviny (α) je v_0. Těleso se nejdříve pohybuje zpomaleným pohybem po nakloněné rovině vzhůru a po zastavení se vrací zpět do nejnižšího bodu. Určete výšku h bodu, v němž se těleso zastaví, okamžik t_1 dosažení tohoto bodu, okamžik t_2 návratu do nejnižšího bodu a rychlost v_0' tělesa v tomto okamžiku. Součinitel třecí síly při pohybu tělesa po nakloněné rovině je k. Řešte nejdříve obecně a pak pro hodnoty $\alpha = 30^\circ$, $v_0 = 5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $k = 0{,}1$ a $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

$\alpha = 30^\circ$, $v_0 = 5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $k = 0{,}1$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $h, t_1, t_2, v_0' = ?$

a) Pohyb vzhůru

Při pohybu směrem vzhůru působí na těleso síla

$$F_1 = F_t + F_T = mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha\,,$$

která je příčinou konstantního zpomalení

$$a_1 = (\sin\alpha + k\cos\alpha)g\,.$$

Okamžik t_1 určíme z podmínky pro nulovou okamžitou rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu

$$v_0 - a_1 t_1 = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + k\cos\alpha)}}\,,\quad t_1 \doteq 0{,}94\ \mathrm{s}.$$

Za časový interval $\langle 0, t_1\rangle$ urazí těleso dráhu

$$s = v_0 t_1 - \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{v_0^2}{g(\sin\alpha + k\cos\alpha)} - \frac{1}{2}(\sin\alpha + k\cos\alpha)g\frac{v_0^2}{g^2(\sin\alpha + k\cos\alpha)^2} \Rightarrow$$

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + k\cos\alpha)}$$

Vzhledem k tomu, že $s = h/\sin\alpha$, je výška h bodu, v němž se těleso zastaví rovna

$$\boxed{h = \frac{v_0^2\sin\alpha}{2g(\sin\alpha + k\cos\alpha)}}\,,\quad h \doteq 1{,}17\ \mathrm{m}.$$

a) Pohyb dolů

Při pohybu směrem dolů působí na těleso síla

$$F_2 = F_t - F_T = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha\,,$$

která je (při splnění podmínky $F_2 > 0 \Rightarrow \sin\alpha - k\cos\alpha > 0 \Rightarrow k < \mathrm{tg}\,\alpha$) příčinou konstantního zrychlení

$$a_2 = (\sin\alpha - k\cos\alpha)g\,.$$

Dobu t_2' pohybu do nejnižšího bodu (čas je měřen od okamžiku začátku rovnoměrně zrychleného pohybu tělesa z nejvyššího bodu) určíme ze známé dráhy s jako

$$s=\frac{1}{2}a_2t_2'^2 \Rightarrow t_2'=\sqrt{\frac{2s}{a_2}}=\sqrt{\frac{2v_0^2}{2(\sin\alpha+k\cos\alpha)g(\sin\alpha-k\cos\alpha)g}} \Rightarrow$$

$$t_2'=\frac{v_0}{g\sqrt{\sin^2\alpha-k^2\cos^2\alpha}}\,.$$

Okamžik návratu tělesa do nejnižšího bodu nakloněné roviny je tedy $t_2=t_1+t_2' \Rightarrow$

$$\boxed{t_2=\left(\frac{1}{\sin\alpha+k\cos\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha-k^2\cos^2\alpha}}\right)\frac{v_0}{g}}\,,\ t_2\doteq 1{,}96\ \text{s}.$$

Rychlost v_0' tělesa v okamžiku návratu tělesa do výchozího bodu – nejnižšího bodu nakloněné roviny určíme jako $v_0'=a_2t_2'$ a tedy

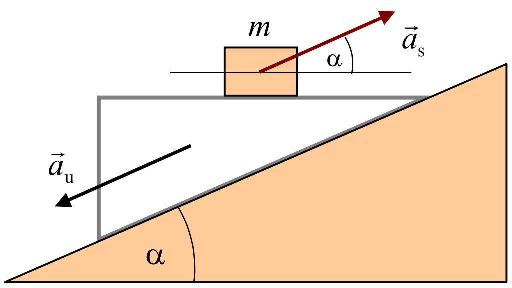
$$v_0'=(\sin\alpha-k\cos\alpha)g\frac{v_0}{g\sqrt{\sin^2\alpha-k^2\cos^2\alpha}} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_0'=v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha-k\cos\alpha}{\sin\alpha+k\cos\alpha}}}\,,\ v_0'\doteq 4{,}58\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

6.12 Po nakloněné rovině (α) klouže bez tření dolů klín, jehož horní stěna je vodorovná. Na této stěně leží těleso hmotnosti m. Určete minimální hodnotu součinitele třecí síly mezi tělesem a klínem, při níž je těleso vůči klínu v klidu.

α, m; $k_{\min}=?$

Klín, pohybující se vůči klidné nakloněné rovině s unášivým zrychlením $\vec{a}_\text{u}$ $(a_\text{u}=g\sin\alpha)$, je neinerciální soustavou. Na těleso o hmotnosti m, ležící na jeho horní vodorovné stěně a pohybující se spolu s klínem, působí setrvačná síla $\vec{F}_\text{s}=m\vec{a}_\text{s}=m(-\vec{a}_\text{u})$; $\vec{F}_\text{s}=\vec{F}_\text{s,v}+\vec{F}_\text{s,s}$;



$$F_\text{s,v}=ma_\text{s}\cos\alpha=mg\sin\alpha\cos\alpha\,,$$

$$F_\text{s,s}=ma_\text{s}\sin\alpha=mg\sin^2\alpha\,.$$

Těleso je vůči pohybujícímu se klínu v klidu tehdy, je-li třecí síla mezi tělesem a klínem větší nebo rovna vodorovné složce setrvačné síly. V případě rovnosti platí

$$F_\text{s,v}=F_\text{T} \Rightarrow\ mg\sin\alpha\cos\alpha=k_{\min}\left(mg-mg\sin^2\alpha\right) \Rightarrow$$

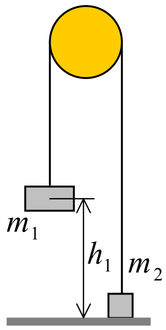
$$\sin\alpha\cos\alpha=k_{\min}\left(1-\sin^2\alpha\right) \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha=k_{\min}\cos^2\alpha \Rightarrow \boxed{k_{\min}=\operatorname{tg}\alpha}$$

6.13 Kotouč se otáčí kolem svislé osy procházející jeho středem a koná $n=\ 10\ \text{ot}\cdot\text{min}^{-1}$. V jaké maximální vzdálenosti od středu kotouče se ještě na jeho povrchu udrží malé těleso, je-li statický součinitel třecí síly mezi tělesem a povrchem kotouče $k=0{,}2$.

$n=10\ \text{ot}\cdot\text{min}^{-1} \Rightarrow \omega=\pi/3\ \text{s}^{-1}$; $k=0{,}2$; $g=9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a_{\max}=?$

$$F_o = F_T \Rightarrow ma_{max}\omega^2 = kmg \Rightarrow \boxed{a_{max} = \frac{g}{\omega^2}}, \; a_{max} \doteq 8{,}9 \text{ m}.$$

6.14 Na neroztažitelné a dokonale ohebné niti vedené přes pevnou kladku zanedbatelné hmotnosti visí dvě nehybná závaží. První z nich o hmotnosti $m_1 = 3\text{ kg}$ je ve výšce $h_1 = 1\text{ m}$ nad vodorovnou rovinou, druhé těleso o hmotnosti $m_2 = 1\text{ kg}$ se této roviny dotýká. Závaží jsou uvolněna a pohybují se rovnoměrně zrychleným pohybem až do okamžiku dopadu prvního tělesa na vodorovnou rovinu. Do jaké výšky vystoupí druhé těleso?



$m_1 = 3\text{ kg}$, $m_2 = 1\text{ kg}$, $h_1 = 1\text{ m}$; $h_2 = ?$

Po uvolnění se soustava pohybuje se zrychlením $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$.

Okamžik dopadu prvního tělesa na vodorovnou rovinu určíme ze známé dráhy h_1 jeho pohybu jako

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h_1(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)g}}.$$

V tomto okamžiku se druhé těleso nachází ve výšce h_1, má rychlost

$$v = at \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2h_1(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}}$$

a kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_2 \frac{2h_1(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} \Rightarrow E_k = \frac{m_2 h_1 (m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}.$$

Druhé těleso se bude dále pohybovat (se zpomalením g) až do úplné přeměny své kinetické energie v energii potenciální. Přitom vystoupí do výšky h_2, kterou určíme ze zákona zachování mechanické energie

$$-\Delta E_k = \Delta E_p \Rightarrow \frac{m_2 h_1 (m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} = m_2(h_2 - h_1)g \Rightarrow \frac{h_1(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} = h_2 - h_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{h_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} h_1}, \; h_2 = 1{,}5 \text{ m}.$$