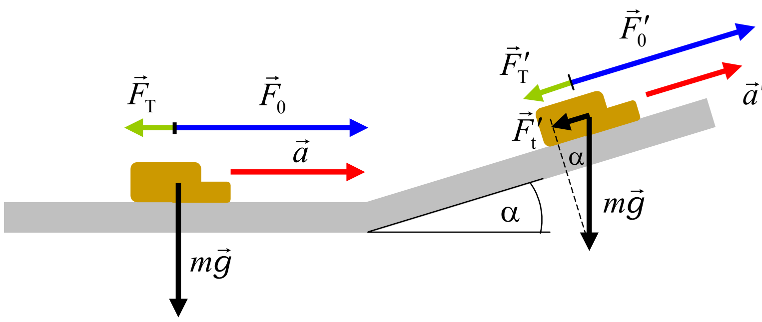
5. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

5.1 Osobní automobil se pohybuje po vodorovné dráze se zrychlením $2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a při rovnoměrném stoupání se zrychlením $1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Určete úhel stoupání za předpokladu, že tahová síla motoru a síla tření jsou stálé.

$a = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $a' = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $F_0 = F_0' = \text{konst.}$; $F_\mathrm{T} = F_\mathrm{T}' = \text{konst.}$; $F_\mathrm{t} = mg\sin\alpha$; $\alpha = ?$



Vodorovný pohyb:

$$m\vec{a} = \vec{F}_0 + \vec{F}_\mathrm{T} \Rightarrow ma = F_0 - F_\mathrm{T};$$

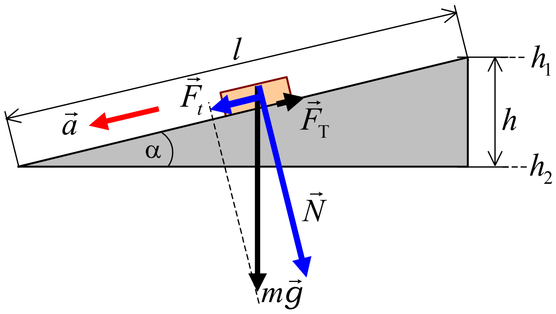
Pohyb po nakloněné rovině:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_0 + \vec{F}_\mathrm{T} + \vec{F}_\mathrm{t} \Rightarrow ma' = F_0 - F_\mathrm{T} - F_\mathrm{t} = ma - mg\sin\alpha \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{a - a'}{g}},\ \alpha = 2{,}3^\circ$$

5.2 Po nakloněné rovině $(\alpha = 30^\circ)$ délky $2\ \mathrm{m}$ se posouvá těleso (HB) účinkem tíhové síly. Jeho pohyb započal v nejvyšším bodě z nulové počáteční rychlosti. Součinitel třecí síly je $0{,}5$. Určete kdy bude těleso v dolním bodě nakloněné roviny a jakou rychlost v něm bude mít. $\left[\text{asi } 1{,}62\ \mathrm{m \cdot s^{-1}};\ 2{,}47\ \mathrm{s}\right]$

$\alpha = 30^\circ$; $l = 2\ \mathrm{m}$; $f = 0{,}5$; $t, v = ?$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + fmgl\cos\alpha \Rightarrow mgl\sin\alpha - fmgl\cos\alpha = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$



$$\boxed{v = \sqrt{2l(\sin\alpha - f\cos\alpha)g}}$$

$$\doteq 1{,}62\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

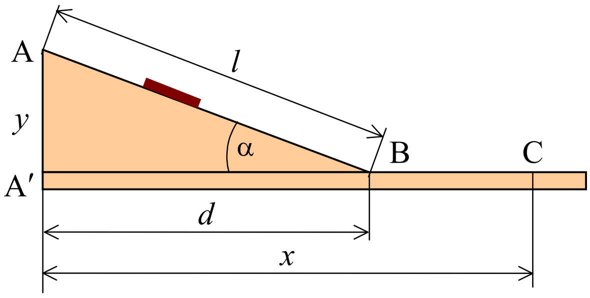
$$v = at \Rightarrow a = \frac{v}{t} \Rightarrow$$

$$a = \frac{\sqrt{2l(\sin\alpha - f\cos\alpha)g}}{t}.$$

$$l = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow l = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2l(\sin\alpha - f\cos\alpha)g}}{t}t^2 \Rightarrow\ l = t\sqrt{\frac{l(\sin\alpha - f\cos\alpha)g}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{t=\sqrt{\frac{2l}{(\sin\alpha - f\cos\alpha)g}}}\text{, asi } 2{,}47\text{ s}$$

5.3 Sáňky sjedou ze zasněženého svahu výšky y a zastaví se na vodorovném zasněženém poli ve vzdálenosti x od průmětu nejvyššího bodu svahu do vodorovné roviny. Vypočtěte součinitel třecí síly mezi saněmi a sněhem.



x; y. $f = ?$

Na nakloněné rovině pracuje síla $\vec{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ o velikosti

$$F = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

na dráze $l = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ a vykoná práci

$$W_1 = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = mgl(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Na **vodorovné** rovině „pracuje" pouze třecí síla $\vec{F}_T \uparrow\downarrow \overrightarrow{BC}$ o velikosti $F_T = fmg$ a na dráze $x - d = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ vykoná práci

$$W_2 = \vec{F}_T \cdot \overrightarrow{BC} = -fmg(x-d).$$

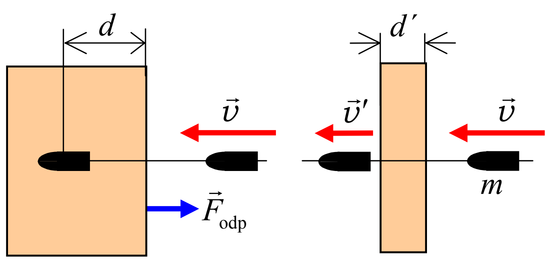
V bodě C se sáňky zastaví – veškerá kinetická energie sáněk, nabytá prací W_1, je spotřebována při překonávání třecí síly $\Rightarrow$ $W_1 + W_2 = 0$ – součet obou prací je roven nule. Dostáváme tedy

$$W_1 + W_2 = 0 \Rightarrow mgl(\sin\alpha - f\cos\alpha) = fmg(x-d) \Rightarrow$$

$$l\sin\alpha - l f\cos\alpha = f x - f d.$$

Použijeme-li v tomto vztahu vyjádření $\sin\alpha = y/l;\ \cos\alpha = d/l$, dostaneme $\boxed{f = \frac{y}{x}}$

5.4 Střela hmotnosti 10 g pohybující se rychlostí $100\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ prorazila desku do hloubky 4 cm. Určete střední sílu odporu desky a dobu pohybu střely v desce za předpokladu, že je to pohyb rovnoměrně zpomalený. Co se za jinak stejných podmínek stane, má-li deska tloušťku 2 cm?



$m = 0{,}01\ \text{kg},\ v = 100\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},$
$d = 0{,}04\ \text{m},\ \ d' = 0{,}02\ \text{m}.$
$F_{pr}, v = ?$

a) $\frac{1}{2}mv^2 = \bar{F}_{odp} d \Rightarrow \boxed{F_{pr} = \frac{mv^2}{2d}}$,

$F_{pr.} = 1{,}25\ \text{kN}$; $a = \frac{F_{pr}}{m} \Rightarrow a = \frac{v^2}{2d}$,

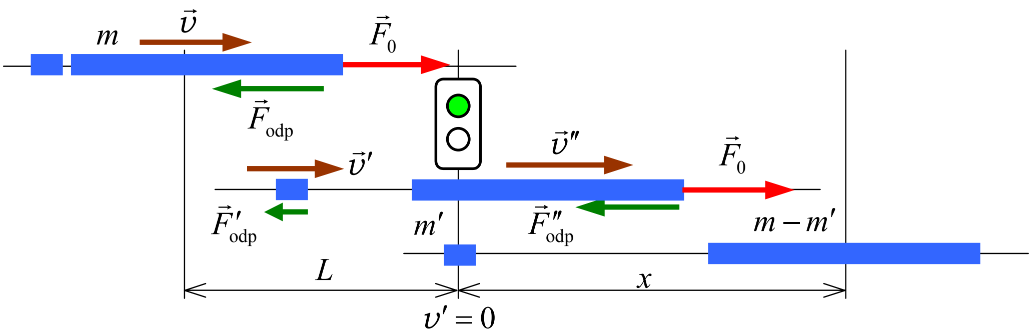
$$v - at = v - \frac{v^2}{2d}t = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{2d}{v}},\ t = 1{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{s}.$$

b) $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv'^2 = F_{pr}d' = \frac{mv^2}{2d}d' \Rightarrow v^2 - v'^2 = \frac{d'}{d}v^2 \Rightarrow$

$$\boxed{v' = v\sqrt{1-\frac{d'}{d}}}, \quad v' = 70{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

5.5 Od rychlíku jedoucího plnou rychlostí se ve vzdálenosti L od semaforu odpojil vagón a zastavil právě u semaforu. V jaké vzdálenosti x za semaforem byl v tomto okamžiku rychlík? Hmotnost celého vlaku je m, hmotnost vagónu je m'. Předpokládá se, že lokomotiva táhne vlak konstantní silou a že odpor proti pohybu každé části vlaku je stálý a úměrný její tíze.

$$L, m, m', v = \text{konst.}, \quad F_0 = kmg = \text{konst.}, \quad x = ?$$



Jede-li vlak před odpojením vagónu plnou rychlostí, znamená to, že jeho pohyb je rovnoměrný $\Rightarrow$ výslednice sil $\vec{F}_0$ a $\vec{F}_{\text{odp}}$ je nulová $\Rightarrow$

$$F_{\text{odp}} = kmg \;\Rightarrow\; F_0 = kmg = \text{konst.}$$

Vagón o hmotnosti m' po odpojení koná rovnoměrně zpomalený pohyb. Zpomalující silou je F'_{odp}.

$$F'_{\text{odp}} = km'g = m'a' \Rightarrow a' = kg \;;\; v' = v - a't = 0 \Rightarrow \quad t = \frac{v}{kg}.$$

$$L = vt - \frac{1}{2}a't^2 = v\frac{v}{kg} - \frac{1}{2}kg\frac{v^2}{(kg)^2} \Rightarrow L = \frac{v^2}{2kg} \Rightarrow \quad v = \sqrt{2Lkg}\;;\; t = \frac{\sqrt{2Lkg}}{kg} \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{kg}}.$$

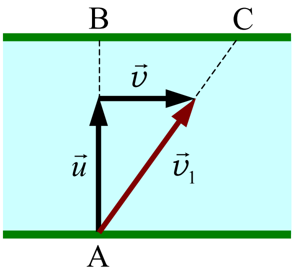
Vlak o hmotnosti $(m-m')$ bez vagónu koná rovnoměrně zrychlený pohyb. Zrychlující silou je výslednice $\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}''_{\text{odp}}$.

$$F = F_0 - F''_{\text{odp}} = kmg - k(m-m')g \Rightarrow km'g = (m-m')a \;\Rightarrow\; a = \frac{km'g}{m-m'}.$$

$$L + x = \sqrt{2Lkg}\sqrt{\frac{2L}{kg}} + \frac{1}{2}\frac{km'g}{m-m'}\frac{2L}{kg} = \frac{2Lm - 2Lm' + Lm'}{m-m'} \Rightarrow \boxed{x = \frac{m}{m-m'}L}$$

5.6 Člověk v loďce vyplouvá k přeplutí řeky z bodu A. Bod B leží proti bodu A na druhém břehu řeky. Bude-li udržovat kurz kolmo k břehům, pak za 10 min od startu dopluje do bodu C, ležícího ve vzdálenosti $S = 120$ m od bodu B po proudu. Bude-li naopak udržovat kurz proti proudu pod jistým úhlem α k přímce AB, pak během 12,5 min dopluje do bodu B. Určete šířku $l = \overline{AB}$ řeky, rychlost u loďky vzhledem k vodě, rychlost υ proudění vody vzhledem k břehům a hodnotu úhlu α.

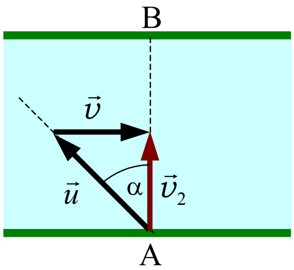
t_1=10 min ; t_2=12,5 min ; $S = 120$ m ; $l, u, \upsilon, \alpha = ?$



Ve vztažné soustavě spojené s břehy řeky koná loďka složený pohyb.

V prvém případě je rychlost $\vec{\upsilon}_1$ tohoto pohybu určena pomocí složek jako $\vec{\upsilon}_1(\upsilon, u)$. Výsledný pohyb do bodu C trvá stejnou dobu t_1 jako dílčí pohyby loďky ve směru složek její výsledné rychlosti $\vec{\upsilon}_1$. Platí tedy

$$ut_1 = l,\ \upsilon t_1 = S \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{S}{t_1}}$$



Ve druhém případě, kdy se loďka pohybuje výslednou rychlostí $\vec{\upsilon}_2$, z obrázku plyne

$$\upsilon = u\sin\alpha\,,\ \upsilon_2 t_2 = ut_2\cos\alpha = l\,.$$

Z těchto dvou rovnic dostaneme jedinou podmínku

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{\upsilon^2}{u^2} + \frac{l^2}{u^2 t_2^2} = 1\,.$$

Dosadíme-li do této podmínky za u a υ z první dvojice rovnic, dostaneme

$$u = \frac{l}{t_1}\,;\ \upsilon = \frac{S}{t_1} \Rightarrow \frac{S^2}{l^2} + \frac{t_1^2}{t_2^2} = 1 \Rightarrow S^2 t_2^2 + t_1^2 l^2 = l^2 t_2^2 \Rightarrow l^2\left(t_2^2 - t_1^2\right) = S^2 t_2^2 \Rightarrow$$

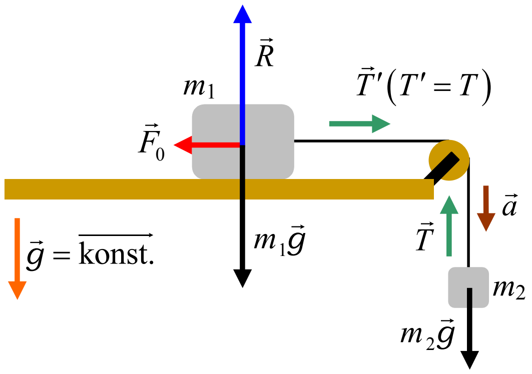
$$\boxed{l = \frac{St_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}}}\,,\ u = \frac{l}{t_1} \Rightarrow \boxed{u = \frac{St_2}{t_1\sqrt{t_2^2 - t_1^2}}}\,,\ \sin\alpha = \frac{\upsilon}{u} = \frac{S}{t_1}\frac{t_1\sqrt{t_2^2 - t_1^2}}{St_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}}{t_2}}$$

5.7 Těleso o hmotnosti 4,0 kg leží na vodorovném stole a vláknem je přes pevnou kladku spojeno s visícím tělesem hmotnosti 1,0 kg. Proti pohybu tělesa na stole působí stálá síla o velikosti 2,0 N. Určete zrychlení soustavy a tažnou sílu v niti.

$m_1 = 4{,}0$ kg, $m_2 = 1{,}0$ kg, $F_0 = 2{,}0$ N, $g = 9{,}8$ m·s^{-2}; $a, T = ?$

Na první těleso (m_1) působí výsledná síla $\left(\vec{R} = -m_1\vec{g} \Rightarrow R = -m_1 g\right)$:



$$\vec{F}_1 = m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{F}_0 + \vec{T}' + \vec{R} \Rightarrow$$

$$m_1 a = m_1 g + T - F_0 - m_1 g \;\Rightarrow$$

$$m_1 a = T - F_0 .$$

Na druhé těleso (m_2) působí výsledná síla

$$\vec{F}_2 = m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} \Rightarrow \; m_2 a = m_2 g - T .$$

Znaménka závisí na směru jednotlivých vektorů vzhledem ke zvolenému (pravděpodobnému) směru zrychlení $\vec{a}$ soustavy!!. Náš úkol se redukuje na řešení soustavy rovnic

$$m_1 a = T - F_0 \,,\; m_2 a = m_2 g - T$$

o dvou neznámých a, T. Sečtením rovnic dostáváme

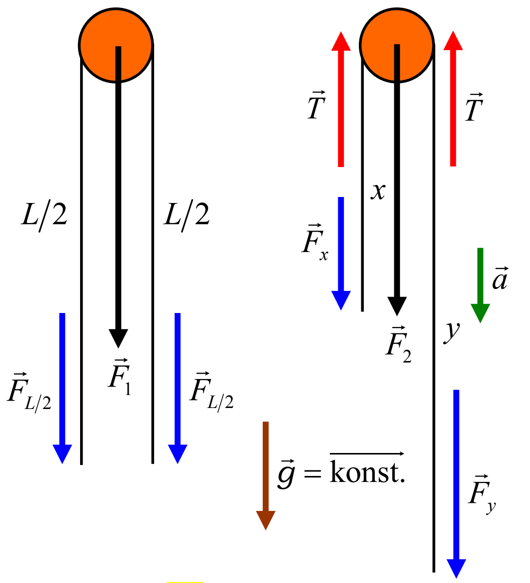
$$(m_1 + m_2)a = m_2 g - F_0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_2 g - F_0}{m_1 + m_2}}$$

Odečtením rovnic dostaneme

$$(m_1 - m_2)a = 2T - F_0 - m_2 g \Rightarrow 2T = F_0 + m_2 g + (m_1 - m_2)\frac{m_2 g - F_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$2T = \frac{2F_0 m_2 + 2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \Rightarrow \boxed{T = \frac{(F_0 + m_1 g)m_2}{m_1 + m_2}}$$

5.8 Homogenní dokonale ohebné vlákno o hmotnosti m a délce L visí v rovnovážné poloze přes vodorovný dokonale hladký hřebík. Je-li jeho rovnováha nepatrně porušena, začne se vlákno pohybovat. Najděte sílu působící na hřebík v okamžiku, kdy délka vlákna visícího po jedné straně hřebíku je y.



$m;\; L;\; g;\; y\,;\; F_2 = ?$

Hmotnost jednotkové délky vlákna je $m_0 = m/L$.

1. Rovnovážný stav (klid) – oba konce vlákna mají shodnou délku $L/2$

$$F_1 = 2F_{L/2} = 2m_0\frac{L}{2}g = m_0 L g = F_g .$$

2. Pohyb vlákna se zrychlením $a(y)$ v okamžiku, kdy pravá část vlákna má délku y. Pro sílu $\vec{F}_2$ působící v tomto okamžiku na hřebík platí $F_2 = 2T$, kde $\vec{T}$ je polovina reakce hřebíku na celkovou tíhu nerovnoměrně se pohybujícího vlákna. Pro vyřešení úlohy je tedy nutné určit sílu $-\vec{T}$ napínající za této situace vlákno.

$$x + y = L \Rightarrow x = L - y\,;\; x + y = L \Rightarrow$$

$$x = L - yF_x = m_0 xg = \frac{F_g}{Lg}(L-y)g \Rightarrow \; F_x = \frac{L-y}{L}F_g \;\; ; \; F_y = \frac{y}{L}F_g \, .$$

Levá část vlákna

$$m_0 x\vec{a} = \vec{F}_x + \vec{T} \Rightarrow m_0 xa = T - F_x \Rightarrow \frac{F_g}{Lg}(L-y)a = T - \frac{L-y}{L}F_g \, .$$

Pravá část vlákna

$$m_0 y\vec{a} = \vec{F}_y + \vec{T} \Rightarrow m_0 ya = F_y - T \Rightarrow \frac{F_g}{Lg}ya = \frac{y}{L}F_g - T \, .$$

Řešením této soustavy rovnic o neznámých a a T dostaneme

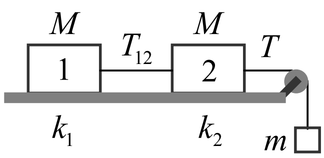
$$a = \left(\frac{2y}{L} - 1\right)g \;\; ; \; T = 2\frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right)F_g \, .$$

Síla $\vec{F}_2$ působící na hřebík v okamžiku, kdy pravá část vlákna má délku y má tedy velikost $F_2 = 2T \Rightarrow$

$$\boxed{F_2 = 4\frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right)F_g = 4\frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right)m_0 Lg = 4m\left(1 - \frac{y}{L}\right)\frac{y}{L}g}$$

5.9 Tři tělesa jsou spolu spojena pevnou nití zanedbatelné hmotnosti. Dvě z těchto těles (každé z nich o hmotnosti M) leží na vodorovné stolní desce, třetí těleso o hmotnosti m je pomocí pevné kladky zavěšeno vedle stolu. Součinitele třecí síly mezi tělesy na stole a stolní deskou jsou k_1 a k_2. Určete zrychlení soustavy těchto těles a síly T a T_{12} napínající nit (viz obrázek). Řešte nejdříve obecně a pak pro hodnoty $M = 1$ kg, $m = 0{,}5$ kg, $k_1 = 0{,}10$, $k_2 = 0{,}15$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. $a = 0{,}98\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

$M = 1$ kg; $m = 0{,}5$ kg; $k_1 = 0{,}10$; $k_2 = 0{,}15$; $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $a, T, T_{12} = ?$



Na tělesa pohybující se po stolní desce působí výsledná síla

$$F_{2M} = T - k_1 Mg - k_2 Mg = T - (k_1 + k_2)Mg \, ,$$

takže druhý pohybový zákon pro tato tělesa zapíšeme ve tvaru

$$T - (k_1 + k_2)Mg = 2Ma \, .$$

Na třetí těleso při jeho pohybu směrem dolů působí výsledná síla

$$F_m = mg - T \, ,$$

takže druhý pohybový zákon pro toto těleso zapíšeme ve tvaru

$$mg - T = ma \, .$$

Řešíme-li soustavu rovnic

$$T - (k_1 + k_2)Mg = 2Ma \, ; \; mg - T = ma \, ,$$

obdržíme

$$\boxed{a = \frac{m - (k_1 + k_2)M}{2M + m}g} \, , \; a = 0{,}98\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \, ;$$

$$\boxed{T = \frac{2+k_1+k_2}{2M+m}2Mmg}, \quad T = 8{,}82\ \mathrm{N}.$$

Na první těleso pohybující se po stolní desce působí výsledná síla

$$F_M = T_{12} - k_1 Mg \Rightarrow T_{12} - k_1 Mg = Ma.$$

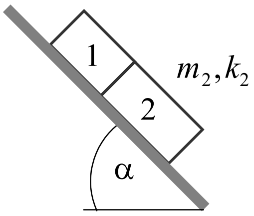
Na druhé a třetí těleso působí výsledná síla

$$F_{Mm} = mg - k_2 Mg - T_{12} \Rightarrow mg - k_2 Mg - T_{12} = (M+m)a.$$

Řešením této soustavy rovnic určíme

$$\boxed{T_{12} = \frac{(k_1-k_2)M + (1+k_1)m}{2M+m}Mg}$$

5.10 Dvě dotýkající se tělesa kloužou po nakloněné rovině $(\alpha = 45^\circ)$. Hmotnost prvního tělesa je $m_1 = 2{,}0\ \mathrm{kg}$, hmotnost druhého tělesa je $m_2 = 3{,}0\ \mathrm{kg}$. Součinitele třecí síly mezi nakloněnou rovinou a tělesy jsou $k_1 = 0{,}1$ a $k_2 = 0{,}2$. Určete: **a)** zrychlení pohybu těles; **b)** sílu vzájemného působení obou těles. Jak by vypadal pohyb těles pro $k_1 > k_2$?



Nejdříve je třeba zjistit, zda druhé těleso brzdí pohyb prvního tělesa. K tomu stačí porovnat zrychlení a_1 a a_2, s nimiž by se obě tělesa pohybovala při daném sklonu nakloněné roviny samostatně. Platí

$$m_1 a_1 = m_1(\sin\alpha - k_1\cos\alpha)g \Rightarrow a_1 = (\sin\alpha - k_1\cos\alpha)g,$$

$$m_2 a_2 = m_2(\sin\alpha - k_2\cos\alpha)g \Rightarrow a_2 = (\sin\alpha - k_2\cos\alpha)g.$$

Pro $\alpha = 45^\circ$ je $\sin\alpha = \cos\alpha$; proto pro $k_1 < k_2$ je $a_1 > a_2$ – druhé těleso **brzdí** pohyb prvního tělesa a obě tělesa se pohybují se stejným zrychlením a.

Označme jako $\vec{T}_{12}$ a $\vec{T}_{21}$ síly vzájemného působení (akce a reakce) mezi oběma tělesy $(\vec{T}_{12} = -\vec{T}_{21}; T_{12} = T_{21} = T)$. Druhý pohybový zákon pro první těleso pak lze zapsat ve tvaru

$$F_1 = m_1 g\sin\alpha - k_1 m_1 g\cos\alpha - T = m_1 a,$$

$$F_2 = m_2 g\sin\alpha - k_2 m_2 g\cos\alpha + T = m_2 a.$$

Řešením těchto rovnic dostáváme $(\sin\alpha = \cos\alpha)$

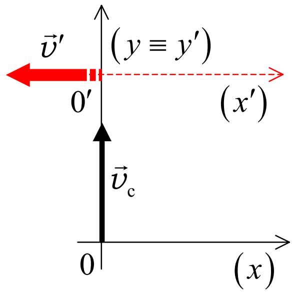
$$\boxed{a = \frac{m_1(1-k_1) + m_2(1-k_2)}{m_1+m_2}g\sin\alpha}, \quad a \doteq 5{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}};$$

$$\boxed{T = \frac{m_1 m_2(k_2-k_1)}{m_1+m_2}g\sin\alpha}, \quad T \doteq 0{,}8\ \mathrm{N}.$$

5.11 Jede-li cyklista směrem k severu rychlostí $v_c = 15\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, zdá se mu, že vítr vane z východu. Jede-li stejně velkou rychlostí směrem k východu, zdá se mu, že vítr vane od jihovýchodu a směr větru svírá s východozápadním směrem úhel $\beta = 22{,}5^\circ$. Určete směr a velikost rychlosti větru.

$$v_c = 15\ \mathrm{km\cdot h^{-1}};\ \beta = 22{,}5^\circ;\ \vec{v} = ?$$

Problém budeme řešit ve třech různých inerciálních soustavách pomocí Galileovy transformace.

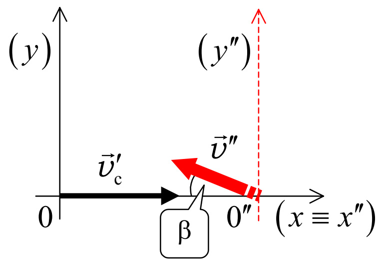


Soustava S je klidná a v ní je rychlost větru popsaná hledaným vektorem $\vec{v}(v_x;v_y)$. Cyklista se v této soustavě pohybuje rychlostmi $\vec{v}_c(0;v_c)$ a $\vec{v}'_c(v_c;0)$.

Soustava S′, spojená s cyklistou jedoucím na **sever**, je vůči soustavě S unášena rychlostí $\vec{u}_1 = \vec{v}_c(0;v_c)$ a rychlost větru vanoucího od **východu** můžeme v soustavě S′ popsat vektorem $\vec{v}'(v'_x;0)$. Zapíšeme-li Galileovu transformaci pro rychlost větru při přechodu ze soustavy S do soustavy S′, dostaneme

$$\begin{aligned} v_x &= v'_x + u_{1,x} \\ v_y &= v'_y + u_{2,x} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} v_x &= v'_x \\ v_y &= v_c \end{aligned} \Rightarrow v_y = v_c .$$

Soustava S″, spojená s cyklistou jedoucím na **východ**, je vůči soustavě S unášena rychlostí $_2 = \vec{v}'_c(v_c;0)$ a rychlost větru vanoucího od **jihovýchodu** můžeme v soustavě



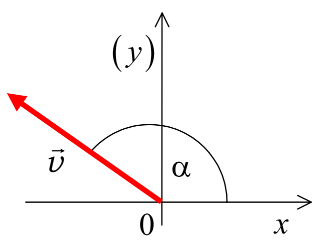
S″ popsat vektorem $\vec{v}''(v''_x;v''_y)$. Směr vektoru $\vec{v}''$ je možno vyjádřit podmínkou $v''_y / v''_x = \mathrm{tg}(180^\circ - \beta)$.

Zapíšeme-li Galileovu transformaci pro rychlost větru při přechodu ze soustavy S do soustavy S″, dostaneme

$$\begin{aligned} v_x &= v''_x + u_{2,x} \\ v_y &= v''_y + u_{2,y} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} v_x &= v''_x + v_c \\ v_y &= v_c = v''_y \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\frac{v''_y}{v''_x} = \frac{v_c}{v_x - v_c} = \mathrm{tg}(180^\circ - \beta) \Rightarrow v_x = \frac{v_c(\mathrm{tg}\beta - 1)}{\mathrm{tg}\beta},$$

$$v_y = v_c,\ \alpha = \mathrm{arctg}\frac{v_y}{v_x} = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\beta - 1}.$$



Určením složek vektoru $\vec{v}$ rychlosti větru v soustavě S je úloha obecně vyřešena.

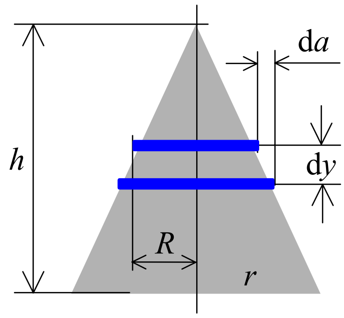
Dosadíme-li dané číselné hodnoty, dostaneme

$$v_x = \frac{15(\mathrm{tg}\,22{,}5^\circ - 1)}{\mathrm{tg}\,22{,}5^\circ} \Rightarrow v_x \doteq -21{,}2;\ v_y = 15 \Rightarrow$$

$$\boxed{v \doteq 26\ \mathrm{km\cdot h^{-1}};\ \alpha = 144{,}6^\circ}$$

5.12 Smyčka vyrobená z těžkého pružného řetězu (m) je nasunuta na kužel, jehož výška je h a poloměr podstavy r. Smyčka je v rovnovážném stavu ve vodorovné rovině, osa kužele je svislá. Určete sílu, kterou je napínána smyčka.

m ; h ; r ; $T = ?$



Síla $\vec{F}$, kterou je napínána smyčka, je v **rovnovážné** poloze v každém příčném průřezu smyčky **opačná** k síle **pružnosti** $\vec{F}_{\mathrm{pr}}\left(F = F_{\mathrm{pr}}\right)$. Velikost F síly $\vec{F}$ určíme následujícím postupem.

Necháme smyčku poklesnout z rovnovážné polohy o (nekonečně malou) vzdálenost $\mathrm{d}y$. Potenciální energie smyčky E_{p} se tím zmenší o $\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = mg\,\mathrm{d}y$. Poloměr smyčky se přitom zvětší o $\mathrm{d}a$. Z obrázku je patrné, že $\mathrm{d}a/\mathrm{d}y = r/h$. Práce síly F při tomto posunutí a roztažení smyčky je rovna

$$\mathrm{d}W = F\left[2\pi\left(R + \mathrm{d}a\right) - 2\pi R\right] = F2\pi\,\mathrm{d}a\,.$$

Tato práce musí být rovna úbytku $\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$ potenciální energie E_{p} smyčky a tedy

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_{\mathrm{p}} \Rightarrow F2\pi\,\mathrm{d}a = mg\,\mathrm{d}y \Rightarrow F = \frac{mg}{2\pi}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} \Rightarrow \boxed{F = \frac{mgh}{2\pi r}}$$