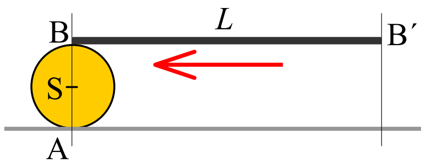
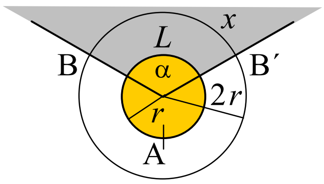
4. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

4.1 Člověk drží jeden konec prkna, jehož druhý konec leží na válci. Člověk začne posouvat prkno kupředu tak, aby se válec valil po vodorovné rovině bez prokluzování a aby ani prkno po válci neklouzalo. Jakou dráhu musí člověk urazit než dostihne válec, má-li prkno délku L. $[2L]$





Dostihnutí válce – ruka (B´) držící konec prkna leží nad středem S válce (B´ → B). Převeďme daný vodorovný posuvný pohyb ruky a středu válce na otáčení kolem bodu A. Pak platí (srov. obrázek)

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{x}{2r} \Rightarrow \boxed{x = 2L}$$

4.2 Vypočtěte úhlovou a translační rychlost bodu na povrchu Země a jeho dostředivé zrychlení v zeměpisné šířce 50°.

$$R_Z \doteq 6\,378\ \text{km} = 6{,}378\cdot 10^6\ \text{m}\ ;\ T = 1\ \text{d} = 8{,}64\cdot 10^4\ \text{s}\ ;\ \alpha = 50^\circ.\ \ \omega, \upsilon, a_d = ?$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}},\ \omega = 0{,}73\cdot 10^{-4}\,\text{s}^{-1};\ \upsilon = \omega R \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{2\pi}{T} R_Z \cos\alpha},\ \upsilon = 2{,}98\cdot 10^2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

$$a_d = \omega^2 R \Rightarrow \boxed{a_d = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_Z \cos\alpha},\ a_d = 2{,}17\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

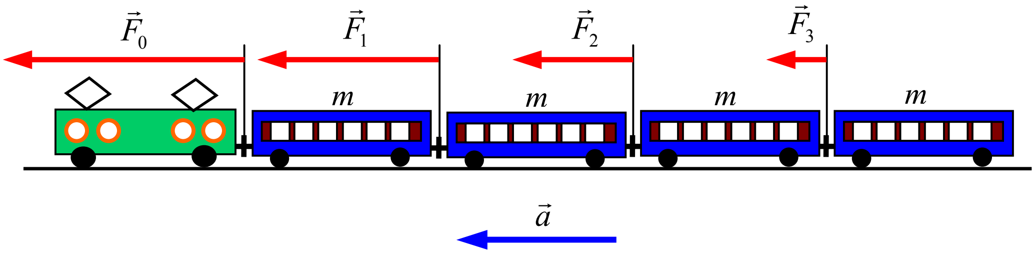
4.3 Kolo na hřídeli se začíná roztáčet z klidu a po 20 s dosáhne $200\ \text{ot}\cdot\text{min}^{-1}$. Jaké je jeho úhlové zrychlení, předpokládáme-li, že je po dobu roztáčení stálé. Kolikrát se za prvních 20 s svého pohybu kolo otočí.

$$t = 20\ \text{s};\ f(20) = 200\ \text{ot}\cdot\text{min}^{-1} = \frac{10}{3}\ \text{s}^{-1}.\ \ \varepsilon, N(20) = ?$$

$$\omega = \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega}{t};\ \omega = 2\pi f \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{2\pi f}{t}},\ \varepsilon = 1{,}05\ \text{s}^{-2}.$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \frac{\pi f}{t} t^2 = \pi f t \Rightarrow N = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{N(t) = \frac{ft}{2}},\ N(20) = 33{,}3\ \text{ot}.$$

4.4 Lokomotiva táhne čtyři stejné vagóny tažnou silou stálé velikosti. Určete velikost tažných sil mezi jednotlivými vagóny.



$$F_0 = 4ma;\; F_1 = 3ma = \frac{3}{4}F_0;\; F_2 = 2ma = \frac{1}{2}F_0;\; F_3 = ma = \frac{1}{4}F_0 .$$

4.5 Jakou průměrnou silou působí na zemský povrch kámen hmotnosti 0,5 kg při svém dopadu z výšky 10 m?

$$m = 0{,}5\ \mathrm{kg};\ h = 10\ \mathrm{m};\ g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.\ F_{\mathrm{PR}} = ?$$

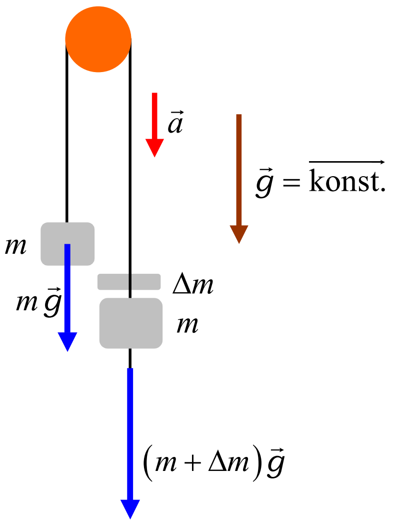
Rychlost kamene při dopadu:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}};\ \upsilon = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2hg}\,.$$

Časový interval dopadu *odhadneme* na hodnotu $\Delta t = 0{,}01\ \mathrm{s}$. Kámen se během tohoto intervalu zastaví a dojde ke změně jeho hybnosti $\Delta p = m\upsilon$. Tato změna hybnosti je rovna celkovému impulsu reakce zemského povrchu na akci – průměrnou sílu působení dopadnuvšího kamene. Platí tedy

$$I = F_{\mathrm{PR}}\Delta t = \Delta p = m\upsilon = m\sqrt{2hg} \Rightarrow \boxed{F_{\mathrm{PR}} = \frac{m\sqrt{2hg}}{\Delta t}},\ F_{\mathrm{PR}} = 700\ \mathrm{N}$$

4.6 Na pevné kladce jsou zavěšena dvě stejná závaží. Určete jejich hmotnost, jestliže přívažkem 0,5 kg soustava (původně v klidu) dosáhne za 4 s rychlosti $2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jakou dráhu urazí za tuto dobu každé závaží?



$$\Delta m = 0{,}5\ \mathrm{kg};\ t = 4\ \mathrm{s},\ \upsilon = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}};$$
$$m_1 = m_2 = m, s = ?$$

$$(\Delta m + 2m)a = \Delta m g \Rightarrow a = \frac{\Delta m}{\Delta m + 2m}g;$$

$$\upsilon = at = \frac{\Delta m}{\Delta m + 2m}gt \Rightarrow \upsilon\Delta m + 2\upsilon m = \Delta m \upsilon t \Rightarrow$$

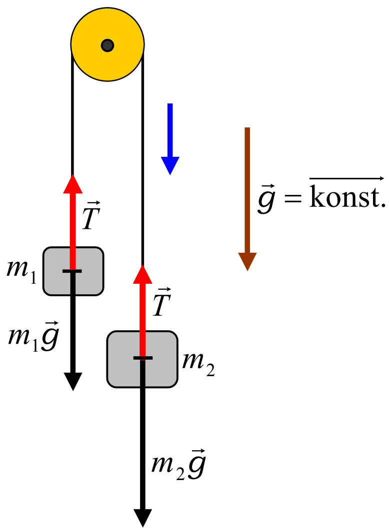
$$\boxed{m = \frac{gt - \upsilon}{2\upsilon}\Delta m}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta m + \frac{gt-\upsilon}{\upsilon}\Delta m}gt^2 \Rightarrow \boxed{s = \frac{1}{2}\upsilon t}$$

4.7 Přes pevnou kladku zanedbatelné hmotnosti je vedena „nehmotná" nit na jejichž koncích visí závaží o hmotnostech 20 g a 30 g. Určete zrychlení závaží a tažnou sílu v niti.

$$m_1 = 0{,}02\ \mathrm{kg},\ m_2 = 0{,}03\ \mathrm{kg},\ |\vec{g}| = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}};\ a, T = ?$$

Pohybují-li se závaží se zrychlením $\vec{a}$ v naznačeném směru, působí každé těleso na nit tažnou silou $-\vec{T}$, a nit odpovídá na tuto akci reakcí – silou $\vec{T}$. Na levé závaží (m_1) působí proto výsledná síla



$$\vec{F}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T} = m_1\vec{a} \Rightarrow m_1 a = T - m_1 g$$

a na pravé závaží (m_2) výsledná síla

$$\vec{F}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T} = m_2\vec{a} \Rightarrow m_2 a = m_2 g - T.$$

Znaménka závisí na směru jednotlivých vektorů vzhledem ke zvolenému (pravděpodobnému) směru zrychlení $\vec{a}$.

Algebraické rovnice $m_1 a = T - m_1 g$, $m_2 a = m_2 g - T$ tvoří soustavu o dvou neznámých (a, T). Sečteme-li je, dostáváme $a(m_1 + m_2) = (m_2 - m_1) g \Rightarrow$

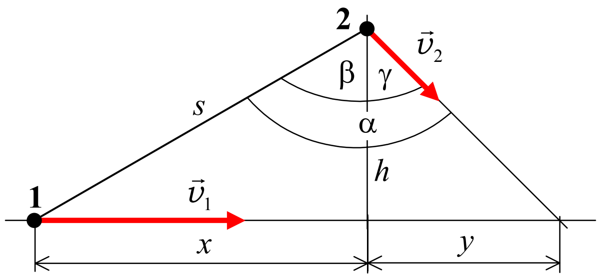
$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g}, \quad a = 1{,}96\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Odečteme-li od sebe zmíněné rovnice, dostaneme

$$(m_2 - m_1)a = (m_1 + m_2)g - 2T \Rightarrow 2T = (m_1 + m_2)g - (m_2 - m_1)a =$$

$$= (m_1 + m_2)g - (m_2 - m_1)\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \Rightarrow \boxed{T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g}, \quad T = 0{,}24\ \mathrm{N}$$

4.8 Člověk je ve vzdálenosti 50 m od přímé silnice, po které přijíždí automobil rychlostí $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jakým směrem musí člověk utíkat, aby se setkal s automobilem, jestliže je automobil v okamžiku, kdy se dá do běhu, od něho vzdálen 200 m a může-li člověk běžet rychlostí $3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$? Jakou nejmenší rychlostí může člověk utíkat, chce-li se potkat s automobilem?



$s = 200\ \mathrm{m}$; $h = 50\ \mathrm{m}$; $v_1 = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $v_2 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\alpha, v_{2,\min} = ?$

Řešme nejdříve situaci, kdy člověk (t_2) dorazí na silnici **dříve** než automobil $(t_1; t_1 > t_2)$. Označme jako α úhel, který svírá rychlost člověka se spojnicí výchozích poloh člověka a automobilu. Z obrázku plyne

$$\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \frac{x}{s}\frac{h}{v_2 t_2} + \frac{h}{s}\frac{y}{v_2 t_2} = \frac{h}{s v_2 t_2}(x + y) \Rightarrow$$

$$\sin\alpha = \frac{h v_1 t_1}{s v_2 t_2}.$$

Z podmínky $t_1 > t_2$ plyne, že

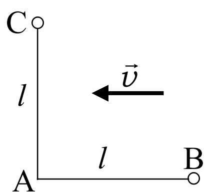
$$\boxed{\sin\alpha > \frac{h v_1}{s v_2}}, \quad \alpha \in (56{,}4^\circ; 123{,}6^\circ)$$

Krajní body tohoto intervalu představují dvě možnosti směru pohybu, při němž člověk dorazí na silnici v tomtéž okamžiku jako automobil $(t_1 = t_2)$.

Pohybuje-li se člověk minimální rychlostí $\upsilon_{2,\min}$, dorazí na silnici ve stejném okamžiku jako automobil $(t_1' = t_2')$ a proto platí

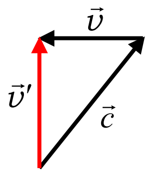
$$\frac{h\upsilon_1}{s\upsilon_{2,\min}} = 1 \Rightarrow \boxed{\upsilon_{2,\min} = \frac{h\upsilon_1}{s}}\,, \quad \upsilon_{2,\min} = 2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

4.9 Z bodu A současně vzlétla dvě letadla, jejichž letová rychlost je stejná a rovna c. Jedno z letadel letí proti větru vanoucímu stálou rychlostí $\vec{\upsilon}\,(\upsilon < c)$ do bodu B a pak se vrátí do bodu A. Druhé z letadel letí kolmo k rychlosti větru a po dosažení bodu C se také vrátí do bodu A. Vzdálenosti $\overline{\mathrm{AB}}$ a $\overline{\mathrm{AC}}$ jsou stejné. Které z letadel se vrátí do bodu A dříve?



Je-li vzdálenost $\overline{\mathrm{AB}} = l$, pak doba letu prvního letadla, letícího zprvu proti a pak po větru, je

$$t_1 = \frac{l}{c-\upsilon} + \frac{l}{c+\upsilon} \Rightarrow t_1 = \frac{2lc}{c^2-\upsilon^2}.$$



Směr rychlosti druhého letadla musí být zvolen tak, aby jeho výsledná rychlost υ' byla při letu tam i zpět kolmá k rychlosti větru. Musí tedy platit $\upsilon' = \sqrt{c^2-\upsilon^2}$. Doba letu druhého letadla je pak

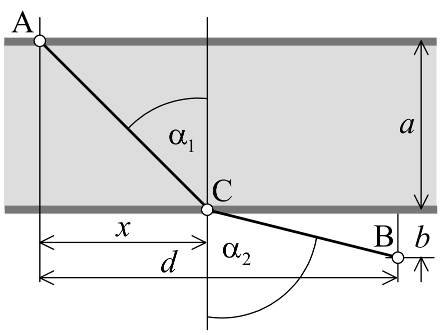
$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}.$$

Vytvoříme-li podíl obou časových intervalů, dostaneme

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{2l}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}\,\frac{c^2-\upsilon^2}{2lc} = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} < 1 \Rightarrow \boxed{t_2 < t_1}$$

Druhé letadlo se tedy vrátí do místa A dříve.

4.10 Z bodu A na břehu kanálu s nehybnou vodou je nutno se přepravit do bodu B na protilehlém břehu. Všechny vzdálenosti jsou zakresleny na obrázku. Člověk na loďce přepluje řeku rychlostí υ_1 z bodu A do bodu C a vzdálenost $\overline{\mathrm{BC}}$ urazí pěšky rychlostí υ_2. Jakou podmínku musí splňovat úhly α_1 a α_2, má-li cesta z bodu A do bodu C trvat nejkratší možnou dobu?



Při daných hodnotách a, b, d závisí hodnoty úhlů α_1 a α_2 i doba t trvání cesty z bodu do bodu B na vzdálenosti x bodu C.

Doba pohybu loďky z bodu A do bodu C je $t_1 = \sqrt{a^2+x^2}/\upsilon_1$. Doba pohybu člověka z bodu C do bodu B je $t_2 = \sqrt{(d-x)^2+b^2}/\upsilon_2$.

Celá cesta z bodu A do bodu B tedy trvá

$$t = t_1 + t_2 \Rightarrow \ t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Nutnou podmínkou extrému (nejkratšího časového intervalu potřebného k cestě z bodu A do bodu B) je nulová první derivace této funkce podle proměnné x.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{2v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{2(d-x)}{2v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0.$$

Z obrázku je zřejmé, že

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin\alpha_1 \ \text{ a } \ \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \sin\alpha_2.$$

Po dosazení do podmínky extrému tedy dostáváme podmínku pro úhly α_1 a α_2 ve tvaru

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} \Rightarrow \boxed{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}}$$

4.11 Po pohyblivých schodech dolů se pohybujícího eskalátoru běží dva chlapci. Rychlost prvního z nich vzhledem ke schodům je u, rychlost druhého vzhledem ke schodům je nu. První chlapec napočítal při svém běhu dolů p schodů, druhý q schodů. Určete skutečný počet N schodů eskalátoru a jeho rychlost v.

Je-li na celkové délce l eskalátoru N schodů, připadá jich na jednotku jeho délky právě N/l.

První chlapec má vzhledem k nehybnému zábradlí rychlost $u+v$, k dolnímu okraji schodů dorazí za čas $l/(u+v)$ a na pohyblivých schodech urazí dráhu $ul/(u+v)$.

Druhý chlapec se vzhledem k nehybnému zábradlí pohybuje rychlostí $nu+v$, k dolnímu okraji schodů dorazí za čas $l/(nu+v)$ a na pohyblivých schodech urazí dráhu $nul/(nu+v)$.

Vzhledem k uvedenému je počet schodů napočítaných oběma chlapci roven

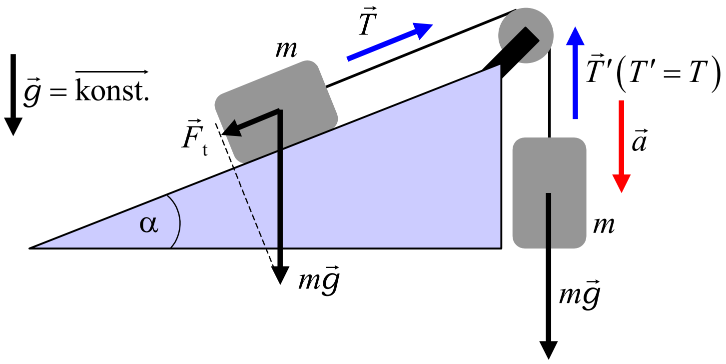
$$p = \frac{ul}{u+v}\frac{N}{l} \quad \text{a} \quad q = \frac{nul}{nu+v}\frac{N}{l}.$$

Řešením těchto rovnic obdržíme postupně

$$\frac{p}{q} = \frac{ul}{u+v}\frac{nu+v}{nul} \Rightarrow \boxed{v = \frac{n(q-p)}{np-q}u}\ ; \ p = \frac{ul}{u + \frac{n(q-p)}{np-q}u}\frac{N}{l} \Rightarrow \boxed{N = \frac{pq(n-1)}{np-q}}$$

4.12 Kladka zanedbatelné hmotnosti je připevněna na vrcholu nakloněné roviny (α). Přes kladku je vedeno vlákno, na jehož koncích jsou upevněna dvě tělesa téže hmotnosti (m). Určete velikost a směr zrychlení soustavy a tažnou sílu v niti.

$$m, g\,;\ a, T = ?$$



Na těleso na nakloněné rovině působí výsledná síla

$$m\vec{a} = \vec{F}_\mathrm{t} + \vec{T} \Rightarrow$$

$$ma = T - F_\mathrm{t} \Rightarrow$$

$$ma = T - mg\sin\alpha\,,$$

Na visící těleso působí výsledná síla

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}' \Rightarrow$$

$$ma = mg - T\,.$$

Řešením soustavy rovnic $ma = T - mg\sin\alpha$, $ma = mg - T$ dostáváme

$$\boxed{a = \frac{1-\sin\alpha}{2}g}\,;\,\boxed{T = \frac{1+\sin\alpha}{2}mg}$$