3. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

3.1 Automobil jel po dálnici rychlostí o stálé velikosti. V okamžiku $t_2 = 8\text{ h }20\text{ min}$ jel kolem milníku s údajem 128 km, v okamžiku $t_3 = 8\text{ h }32\text{ min}$ kolem milníku s údajem 144 km. Úkoly: **a)** Určete velikost rychlosti automobilu. **b)** Určete polohu automobilu v okamžicích $t_1 = 8\text{ h }10\text{ min}$, $t_4 = 9\text{ h }15\text{ min}$. **c)** Určete okamžik, v němž automobil projel kolem milníku s údajem 180 km.

$$\upsilon = \text{konst.};\ t_1 = \frac{490}{60}\,\text{h};\ t_2 = \frac{500}{60}\,\text{h};\ t_3 = \frac{512}{60}\,\text{h};\ t_4 = \frac{555}{60}\,\text{h};\ x_2 = 128\text{ km};$$
$$x_3 = 144\text{ km};\ x_5 = 180\text{ km}.\ \upsilon, x_1, x_4, t_5 = ?$$

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že pohyb automobilu je i před jízdou na dálnici rovnoměrný přímočarý a že v okamžiku $t = 0$ se automobil nacházel v bodě o souřadnici x_0. Naším úkolem je najít vektorovou rovnici dráhy automobilu (považovaného za hmotný bod), která má tvar

$$\vec{r}(t) = \left[x(t) + x_0\right]\vec{i} = (\upsilon t + x_0)\vec{i}\ .$$

Neznámé υ a x_0 určíme pomocí daných hodnot ze soustavy rovnic

$$\begin{matrix} x_2 = \upsilon t_2 + x_0 \\ x_3 = \upsilon t_3 + x_0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 128 = \upsilon \dfrac{500}{60} + x_0 \\ 144 = \upsilon \dfrac{512}{60} + x_0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 80\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}},\ x_0 = -538{,}7\text{ km}.$$

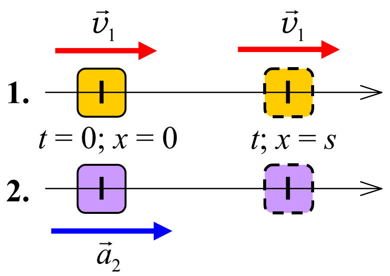
Vektorová rovnice dráhy automobilu má tedy tvar

$$\vec{r}(t) = (80t - 538{,}7)\vec{i} \Rightarrow x(t) = 80t - 538{,}7\,.$$

Dosazením do vztahu pro souřadnici automobilu určíme všechny další neznámé.

$$\boxed{x_1 = 114{,}7\text{ km}},\ \boxed{x_4 = 201{,}3\text{ km}},\ \boxed{t_5 = 8\text{ h }59\text{ min}}$$

3.2 Těleso pohybující se rovnoměrným pohybem rychlostí o velikosti $98\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ míjí jiné těleso, které se zrovna začíná pohybovat z klidu rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti $9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ve směru pohybu prvního tělesa. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od bodu míjení bude první těleso druhým tělesem dostiženo?



$$\upsilon_1 = 98\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = \text{konst.};\ a_2 = 9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.\ t_s, s = ?$$

$x_1(t) = \upsilon_1 t;\ x_2(t) = \frac{1}{2}a_2 t^2$; při **míjení** těles platí

$$x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow a_2 t^2 - 2\upsilon_1 t = 0 \Rightarrow$$

$$t(a_2 t - 2\upsilon_1) = 0$$

$$t_1 = 0 \text{ – nevyhovuje} \Rightarrow \boxed{t_2 = t_s = \frac{2\upsilon_1}{a_2}},\ t_s = 20\text{ s}.$$

$$s = x_1(t_s) = x_2(t_s) \Rightarrow \boxed{s = \frac{2\upsilon_1^2}{a_2}}, \; s = 1960 \text{ m}$$

3.3 Vlak vjíždí do stanice rychlostí $27 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a za 30 s zastaví u nástupiště. Jaká je jeho brzdná dráha a s jakým (stálým) zpomalením se po ní pohybuje?

$$a = \text{konst.};\; t_1 = 30 \text{ s};\; \upsilon_0 = 27 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \left(\frac{27\,000}{3600}\right) \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 7{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\;.\; x_1, a = ?$$

Ze vztahu $\upsilon = \upsilon_0 - at$ pro okamžitou rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu dostaneme při znalosti okamžiku zastavení pro zpomalení

$$\upsilon_0 - at_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{\upsilon_0}{t_1}}, \; a = 0{,}25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Dosazením tohoto vyjádření zpomalení do vztahu pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu, dostaneme brzdnou dráhu vlaku

$$s = x(t_1) = \upsilon_0 t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = \upsilon_0 t_1 - \frac{1}{2}\frac{\upsilon_0}{t_1}t_1^2 \Rightarrow \boxed{s = x(t_1) = \frac{1}{2}\upsilon_0 t_1}, \; s = 112{,}2 \text{ m}.$$

3.4 Časový interval mezi přijetím signálu k zastavení automobilu a sešlápnutím brzdového pedálu je u průměrného řidiče asi $0{,}6 \text{ s}$. Maximální velikost jeho zpomalení je $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Vypočtěte celkovou dráhu automobilu od okamžiku přijetí signálu po zastavení, je-li počáteční rychlost automobilu **a)** $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, **b)** $100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

$$\Delta t = 0{,}6 \text{ s};\; a = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2};\; \upsilon_{0,1} = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}; \upsilon_{0,2} = 100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1};\; s_{1,2} = ?$$

$$s = (\upsilon_0 \Delta t) + \upsilon_0 t - \frac{1}{2}at^2;\; \upsilon = \upsilon_0 - at \Rightarrow t = \frac{\upsilon_0}{a} \Rightarrow$$

$$s = (\upsilon_0 \Delta t) + \frac{\upsilon_0^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{\upsilon_0^2}{a} \Rightarrow \boxed{s = (\upsilon_0 \Delta t) + \frac{\upsilon_0^2}{2a}}, \; s_{a,b} = 27{,}6 \text{ m}; 93{,}8 \text{ m}$$

3.5 Vlak, který má 12 vagónů, se rozjíždí tak, že klidného pozorovatele, který stál u začátku prvního vagónu, míjí konec tohoto vagónu za 6 s. Za jak dlouho kolem něj projede poslední vagón za předpokladu, že všechny vagóny jsou stejně dlouhé a že pohyb vlaku je rovnoměrně zrychlený?

$$t_1 = 6 \text{ s};\; 12 \text{ vagónů};\; a = \text{konst.};\; L(\text{délka vagónu}) = \text{konst.};\; \Delta t_{12} = ?$$

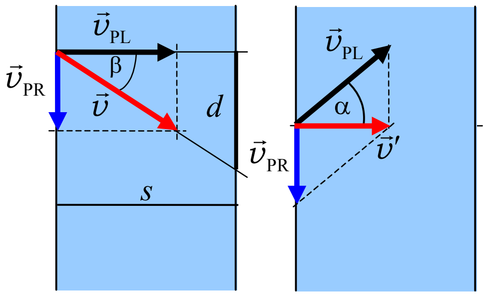
$$L = \frac{1}{2}at_1^2,\; 2L = \frac{1}{2}at_2^2, \ldots,\; 11L = \frac{1}{2}at_{11}^2,\; 12L = \frac{1}{2}at_{12}^2;\; a = \frac{2L}{t_1^2} \Rightarrow$$

$$11L = \frac{1}{2}\frac{2L}{t_1^2}t_{11}^2 \Rightarrow 11 = \frac{t_{11}^2}{t_1^2},\; 12 = \frac{t_{12}^2}{t_1^2}.\; t_{11} = t_1\sqrt{11},\; t_{12} = t_1\sqrt{12} \Rightarrow$$

$$\Delta t_{12} = t_{12} - t_{11} \Rightarrow \boxed{\Delta t_{12} = t_1\left(\sqrt{12} - \sqrt{11}\right)}, \; \Delta t_{12} \doteq 0{,}89 \text{ s}$$

3.6 Plavec plovoucí rychlostí $1{,}25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ vzhledem k vodě má přeplavat řeku 150 m širokou. Je-li směr rychlosti jeho plování kolmý na proud, je unesen proudem řeky o

120 m níže. Jaký směr vzhledem k proudu musí zvolit, má-li doplavat do protilehlého bodu na druhém břehu? Jak dlouho v tomto případě poplave?



$d = 120$ m; $\upsilon_{\mathrm{PL}} = 1{,}25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $s = 150$ m.

$\alpha, t = ?$

Směr plavby:

$$\upsilon_{\mathrm{PR}} = \upsilon_{\mathrm{PL}}\,\mathrm{tg}\,\beta \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{PR}} = \frac{d}{s}\upsilon_{\mathrm{PL}};$$

$$\sin\alpha = \frac{\upsilon_{\mathrm{PR}}}{\upsilon_{\mathrm{PL}}} = \frac{d}{s} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arcsin\frac{d}{s}},\ \alpha \doteq 54^\circ$$

Doba plavby:

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_{\mathrm{PL}}^2 - \upsilon_{\mathrm{PR}}^2} = \sqrt{\upsilon_{\mathrm{PL}}^2 - \frac{d^2}{s^2}\upsilon_{\mathrm{PL}}^2} \Rightarrow \upsilon' = \frac{\upsilon_{\mathrm{PL}}}{s}\sqrt{s^2 - d^2}.$$

$$t = \frac{s}{\upsilon'} \Rightarrow \boxed{t = \frac{s^2}{\upsilon_{\mathrm{PL}}\sqrt{s^2 - d^2}}},\ t \doteq 3{,}3\ \mathrm{min}$$

3.7 Motorová loď má v klidné vodě rychlost o velikosti $8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete velikost a směr rychlosti jejího (složeného) pohybu při témž výkonu motoru v řece, v níž voda proudí rychlostí o stálé velikosti $4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Loď se pohybuje **a)** po proudu, **b)** proti proudu, **c)** rychlost lodi je kolmá k proudu, **d)** klidný pozorovatel na břehu řeky registruje pohyb lodi kolmo k proudu.

$\upsilon_0 = 8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\upsilon_{\mathrm{v}} = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}_{\mathrm{v}} \Rightarrow \textbf{a)}\ \upsilon = \upsilon_0 + \upsilon_{\mathrm{v}};\ \textbf{b)}\ \upsilon = \upsilon_0 - \upsilon_{\mathrm{v}};\ \textbf{c)}\ \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_{\mathrm{v}}^2};\ \textbf{d)}\ \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon_{\mathrm{v}}^2}.$$

$$\left[12\,\mathrm{m \cdot s^{-1}};\ 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}};\ 8{,}9\,\mathrm{m \cdot s^{-1}};\ 63{,}5^\circ;\ 6{,}9\,\mathrm{m \cdot s^{-1}};\ 120^\circ\right]$$

3.8 Těleso urazilo rovnoměrně zrychleným pohybem dráhu s za čas t. Velikost rychlosti pohybu se přitom zvětšila $n-$krát. Určete velikost zrychlení tělesa jako funkci s, t, n.

$s; t;\ \upsilon = n\upsilon_0$; $a = a(s,t,n) = ?$

$$\upsilon = at + \upsilon_0 \ \wedge\ \upsilon = n\upsilon_0 \Rightarrow n\upsilon_0 = at + \upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{at}{n-1};$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 + \upsilon_0 t \Rightarrow s = \frac{1}{2}at^2 + \frac{at}{n-1}t \Rightarrow \boxed{a = \frac{2s(n-1)}{t^2(n+1)}}$$

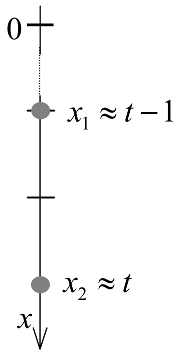
3.9 Týmž místem (M) projedou ve stejném směru v časovém odstupu $20\,\mathrm{s}$ dvě auta. První auto se pohybuje se zrychlením $0{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a má při projíždění místa M rychlost $25\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a, druhé se pohybuje se zrychlením $2{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a má v tomtéž místě rychlost $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Za jakou dobu od okamžiku projetí místa M prvním autem dostihne druhé auto první?

$\Delta t = 20\ \mathrm{s}$; $a_1 = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $\upsilon_{1,\mathrm{M}} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $a_2 = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $\upsilon_{2,\mathrm{M}} = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $t = ?$

Počátek měření času $(t = 0)$ volíme v okamžiku průjezdu druhého auta místem $\mathrm{M} \equiv 0$. První auto v okamžiku $t = 0$:

$$x_1(0) = \upsilon_{1,\mathrm{M}} \Delta t + \frac{1}{2} a_1 (\Delta t)^2 ;\ \upsilon_1(0) = \upsilon_{1,\mathrm{M}} + a_1 \Delta t .$$

První auto v okamžiku t:



$$x_1(t) = \upsilon_1(0) t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + x_1(0) \Rightarrow$$

$$x_1(t) = (\upsilon_{1,\mathrm{M}} + a_1 \Delta t) t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + \upsilon_{1,\mathrm{M}} \Delta t + \frac{1}{2} a_1 (\Delta t)^2 .$$

Druhé auto v okamžiku t:

$$x_2(t) = \upsilon_{2,\mathrm{M}} t + \frac{1}{2} a_2 t^2 .$$

Při dostižení prvního auta druhým platí $(t > 0)$:

$$x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow$$

$$(\upsilon_{1,\mathrm{M}} + a_1 \Delta t) t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + \upsilon_{1,\mathrm{M}} \Delta t + \frac{1}{2} a_1 (\Delta t)^2 = \upsilon_{2,\mathrm{M}} t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \Rightarrow$$

$$(a_2 - a_1) t^2 + 2(\upsilon_{2,\mathrm{M}} - \upsilon_{1,\mathrm{M}} - a_1 \Delta t) - \upsilon_{1,\mathrm{M}} \Delta t - a_1 (\Delta t)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$t^2 - 25t - 600 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{25 \pm 55}{2} \Rightarrow t_1 = 40\ \mathrm{s} \Rightarrow \boxed{t = t_1 + \Delta t},\ t = 60\ \mathrm{s}$$

3.10 Těleso při volném pádu urazí v poslední sekundě svého pohybu dvě třetiny své dráhy. Určete celkovou dráhu jeho volného pádu $\left(g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\right)$.

$$x_2 = 3x_1;\ x_1 = \frac{1}{2} g (t-1)^2 ;\ x_2 = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} g t^2 = \frac{3}{2} g (t-1)^2 \Rightarrow 2t^2 - 6t + 3 = 0 \Rightarrow t = 2{,}37\ \mathrm{s} .$$

$$x_2 = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 27{,}5\ \mathrm{m}}$$

3.11 Z okraje střechy ve výšce 16 m padají v pravidelných intervalech kapky vody. První z nich dopadne na zem v okamžiku, kdy se z okraje střechy uvolňuje pátá kapka. Jaká je v tomto okamžiku vzdálenost druhé a čtvrté kapky?

$h = 16\ \mathrm{m}$; $l_{24} = ?$

Doba volného pádu první kapky je $t = \sqrt{2h/g}$. Časový interval mezi oddělením jednotlivých kapek od okraje střechy je tedy

$$\Delta t = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{h}{8g}} .$$

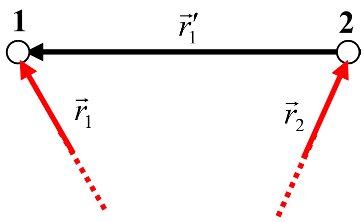
Pro vzdálenost druhé a čtvrté kapky platí

$$l_{24} = l_2 - l_4 = \frac{1}{2} g (3\Delta t)^2 - \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} g \frac{9h}{8g} - \frac{1}{2} g \frac{h}{8g} \Rightarrow \boxed{l_{24} = \frac{h}{2}}, \ l_{24} = 8 \text{ m}$$

3.12 Dvě tělesa se pohybují rovnoměrně po téže přímce rychlostmi υ_1 a υ_2. Pohybují-li se stejným směrem, roste vzdálenost mezi nimi o 3 m za každých 5 s. Pohybují-li se proti sobě, zkracuje se až do jejich střetnutí vzdálenost mezi nimi o 16 m za každých 10 s. Určete rychlosti obou těles.

$$l_1 = 3 \text{ m}; \ t_1 = 5 \text{ s}; \ l_2 = 16 \text{ m}; \ t_2 = 10 \text{ s}; \quad \upsilon_1, \upsilon_2 = ?$$

Pro relativní rychlost $\vec{\upsilon}_1'$ prvního tělesa vůči druhému plyne z obrázku



$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 .$$

Jsou-li rychlosti $\vec{\upsilon}_1$ a $\vec{\upsilon}_2$ **souhlasně** rovnoběžné (tělesa se pohybují stejným směrem) a mají-li společnou nositelku, je velikost υ_1' relativní rychlosti $\vec{\upsilon}_1'$ rovna $\upsilon_1' = |\upsilon_1 - \upsilon_2|$. Z textu úlohy plyne, že rychlosti jsou různé. Zvolíme-li indexy u veličin tak, že $\upsilon_1 > \upsilon_2$, platí

$$\upsilon_1' = \upsilon_1 - \upsilon_2 \wedge \upsilon_1' = \frac{l_1}{t_1} \Rightarrow \upsilon_1 - \upsilon_2 = \frac{l_1}{t_1} .$$

Jsou-li rychlosti $\vec{\upsilon}_1$ a $\vec{\upsilon}_2$ **nesouhlasně** rovnoběžné (tělesa se pohybují proti sobě) a mají-li společnou nositelku, je velikost υ_1'' relativní rychlosti $\vec{\upsilon}_1''$ prvního tělesa vůči druhému rovna $\upsilon_1'' = \upsilon_1 + \upsilon_2$. Platí

$$\upsilon_1'' = \upsilon_1 + \upsilon_2 \wedge \upsilon_1'' = \frac{l_2}{t_2} \Rightarrow \upsilon_1 + \upsilon_2 = \frac{l_2}{t_2} .$$

Řešením soustavy rovnic $\upsilon_1 - \upsilon_2 = l_1/t_1$ a $\upsilon_1 + \upsilon_2 = l_2/t_2$ dostáváme

$$\boxed{\upsilon_1 = \frac{l_2 t_1 + l_1 t_2}{2 t_1 t_2}}, \ \upsilon_1 = \ 1{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad \boxed{\upsilon_2 = \frac{l_2 t_1 - l_1 t_2}{2 t_1 t_2}}, \ \upsilon_2 = \ 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$