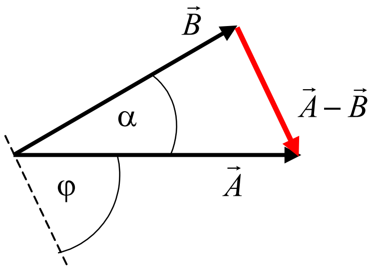
2. SEMINÁŘ Z MECHANIKY

2.1 Vektor $\vec{A}$ o velikosti 0,1 m svírá úhel $\alpha = 30^\circ$ s vektorem $\vec{B}$ o velikosti 0,06 m. Najděte velikost rozdílu $\vec{A}-\vec{B}$ a úhel φ, který svírá vektor $\vec{A}-\vec{B}$ s vektorem $\vec{A}$.

$$\left|\vec{A}\right| = A = 0{,}1\ \text{m};\ \left|\vec{B}\right| = B = 0{,}06\ \text{m};\ \alpha = 30^\circ;\ \left|\vec{A}-\vec{B}\right| = ?,\ \varphi = ?$$



$$\boxed{\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha}}$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}06^2 - 2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}06\ \cos 30^\circ} \Rightarrow$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| \doteq 0{,}057\ \text{m}.$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right) = A\left|\vec{A}-\vec{B}\right|\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{A}\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right)}{A\left|\vec{A}-\vec{B}\right|} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{B}}{A\left|\vec{A}-\vec{B}\right|} = \frac{A^2 - AB\cos\alpha}{A\left|\vec{A}-\vec{B}\right|} \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A^2 - AB\cos\alpha}{A\left|\vec{A}-\vec{B}\right|}};\ \cos\varphi = \frac{0{,}1^2 - 0{,}1\cdot 0{,}057\cdot\cos 30^\circ}{0{,}1\cdot 0{,}057} = 0{,}888 \Rightarrow \varphi \doteq 27{,}3^\circ.$$

2.2 Vypočtěte úhel svíraný vektory **a)** $\vec{A} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$ a $\vec{B} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, **b)** $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \sqrt{3}\,\vec{k}$ a $\vec{B} = 3\vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j} + 3\vec{k}$.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}}$$

a) $\cos\alpha = \dfrac{2\cdot 3 - 4\cdot 4 + 2\cdot 5}{\sqrt{4+16+4}\ \sqrt{9+16+25}} = \dfrac{6-16+10}{\sqrt{24}\ \sqrt{50}} = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$

b) $\cos\alpha = \dfrac{9 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{9+4+3}\ \sqrt{9+2+9}} = \dfrac{9 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{8\sqrt{5}} \doteq 0{,}6355 \Rightarrow \cos\alpha \doteq 0{,}6355 \Rightarrow$

$$\alpha = 50{,}54^\circ$$

2.3 Vektory $\vec{A}$ a $\vec{B}$ jsou dány svými složkami $\vec{A}(3;1;-4)$, $\vec{B}(0;-5;2)$. Vypočtěte **a)** součet, velikost a směrové kosiny vektorů $\vec{A}+\vec{B}$ a $\vec{A}-\vec{B}$, **b)** skalární součin $\vec{A}\cdot\vec{B}$ a úhel svíraný vektory $\vec{A}$ a $\vec{B}$, **c)** vektorový součin $\vec{A}\times\vec{B}$ a jeho velikost.

$$\vec{A}(3;1;-4),\ \vec{B}(0;-5;2);$$

a) $\vec{A}+\vec{B} = \vec{C}(3;-4;-2)$, $\vec{A}-\vec{B} = \vec{D}(3;6;-6)$, $\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = C = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$,

$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = D = \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9$

$\vec{A}+\vec{B}$: $\cos\alpha_x \doteq 0{,}55$; $\cos\alpha_y \doteq -0{,}74$; $\cos\alpha_z \doteq -0{,}37$

$\vec{A}-\vec{B}$: $\cos\alpha_x \doteq 0{,}33$; $\cos\alpha_y \doteq 0{,}67$; $\cos\alpha_z \doteq -0{,}67$

b) $\vec{A}\cdot\vec{B} = 3\cdot 3 + (-4)\cdot 6 + (-2)(-6) = 9 - 24 + 12 = -3$;

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}+\vec{B}\right)}{\left|\vec{A}+\vec{B}\right|\cdot\left|\vec{A}-\vec{B}\right|} = \frac{-3}{\sqrt{29}\sqrt{81}} \doteq -0{,}062;$$

c) $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} = (-18)\vec{i} + (-6)\vec{j} + (-15)\vec{k}$, $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| \doteq 24{,}2$

2.4 Zjednodušte výrazy **a)** $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right)$; **b)** $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\left(\vec{A}-\vec{B}\right)$; **c)** $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2 + \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2$.

a) $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right) = \vec{A}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} - \vec{B}\cdot\vec{B} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right) = A^2 - B^2}$

b) $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\left(\vec{A}-\vec{B}\right) = \vec{A}\times\vec{A} - \vec{A}\times\vec{B} + \vec{B}\times\vec{A} - \vec{B}\times\vec{B} = -\vec{A}\times\vec{B} + \vec{B}\times\vec{A} \Rightarrow$

$$\boxed{\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\left(\vec{A}-\vec{B}\right) = 2\vec{B}\times\vec{A}}$$

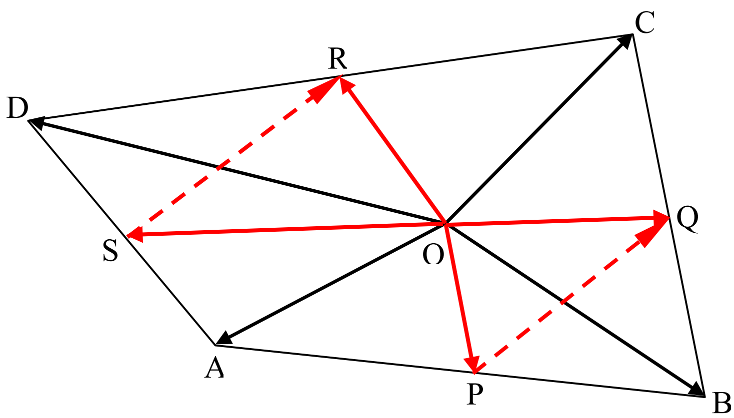
c) $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2 + \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2 = \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) + \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) =$

$$= \left(AB\cos\alpha\right)^2 \cos 0 + \left(AB\sin\alpha\right)^2 \cos 0 = A^2B^2\left(\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2 + \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2 = A^2B^2}$$

2.5 Dokažte, že středy stran libovolného čtyřúhelníka jsou vrcholy rovnoběžníka.

V rovině čtyřúhelníka ABCD zvolíme libovolný bod O jako počátek níže uváděných polohových vektorů. Pak platí



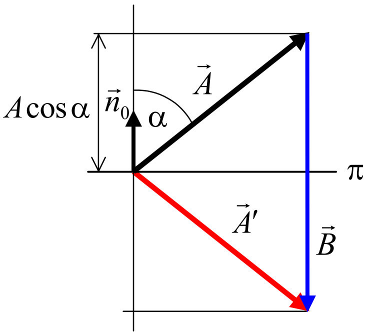
$$\vec{r}_P = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right),\ \vec{r}_Q = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_B + \vec{r}_C\right),\ \vec{r}_R = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_C + \vec{r}_D\right),\ \vec{r}_S = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_D + \vec{r}_A\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_C - \vec{r}_A\right)$$

$$\overrightarrow{SR} = \vec{r}_R - \vec{r}_S = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_C + \vec{r}_D - \vec{r}_D - \vec{r}_A\right) \Rightarrow \overrightarrow{SR} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{r}_C - \vec{r}_A\right) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{PQ} = \overline{SR} \wedge PQ \parallel SR}$$

Pro zbývající dvě strany rovnoběžníka PQRS je důkaz jejich shodné délky a rovnoběžnosti analogický.



2.6 Najděte vektor, který je k danému vektoru $\vec{A}$ symetrický vzhledem k rovině s normálou $\vec{n}_0$.

$$\vec{A}\cdot\vec{n}_0 = A\cos\alpha\,,\ \vec{B} = -2\left(\vec{A}\cdot\vec{n}_0\right)\vec{n}_0\,,$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} - 2\left(\vec{A}\cdot\vec{n}_0\right)\vec{n}_0}$$

2.7 Sestrojte bod O v rovině čtyřúhelníka ABCD tak, aby platilo

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}\,.$$

V rovině čtyřúhelníka ABCD zvolme libovolný bod P. Vytvořme vektorový součet

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD}\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\,\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\,.$$

Má-li mít bod O požadovanou vlastnost musí platit

$$\boxed{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\,\overrightarrow{PO}}$$

Po (libovolné) volbě bodu P určuje tato vektorová rovnice jednoznačně polohu bodu O.

2.8 Jsou vektory $\vec{A}(2;-1;-2)$, $\vec{B}(6;-3;1)$ a $\vec{C}(-2;1;-5)$ komplanární?

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 30 + 2 - 12 + 12 - 30 - 2 = 0\,.$$

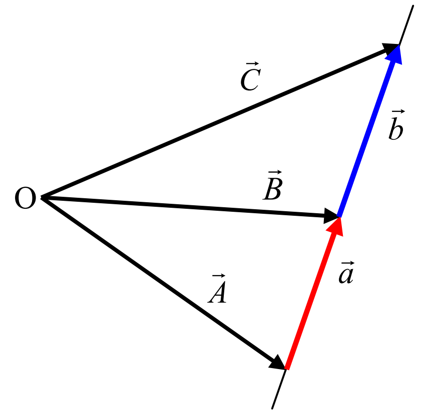
Smíšený součin uvažovaných vektorů je roven 0, což znamená, že vektory jsou komplanární.

2.9 Z bodu O vycházejí tři vektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$. Jaké podmínce musí vyhovovat, aby jejich koncové body ležely na téže přímce?

Vektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ mají být **komplanární** $\Rightarrow$

$$k_1\vec{A} + k_2\vec{B} + k_3\vec{C} = \vec{0}\,;\ \vec{a} = \vec{B} - \vec{A}\,,\ \vec{b} = \vec{C} - \vec{B}$$

$$\wedge\ \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \alpha\left(\vec{B} - \vec{A}\right) = \vec{C} - \vec{B} \Rightarrow$$

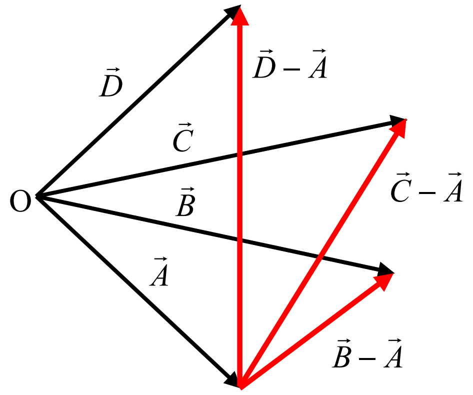


$$-\alpha\vec{A}+(\alpha+1)\vec{B}-\vec{C}=0.$$

Srovnáme-li tento výraz s podmínkou komplanarity vektorů $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$, dostaneme $k_1=-\alpha$, $k_2=\alpha+1$, k_3 . Pro trojici součinitelů $k_1,k_2,k_3\in R$, které splňují zadání úlohy tedy platí podmínka

$$k_1+k_2+k_3=-\alpha+(\alpha+1)-1\Rightarrow\boxed{k_1+k_2+k_3=0}$$

1.10 Vektory $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ a $\vec{D}$ vycházejí z téhož bodu. Jaké podmínce musí vyhovovat, aby jejich koncové body ležely v téže rovině?



Vektory $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ mají být komplanární, musí tedy platit

$$k_1\vec{A}+k_2\vec{B}+k_3\vec{C}+k_4\vec{D}=\vec{0}.$$

Komplanární musejí být proto také vektory $\vec{B}-\vec{A}$, $\vec{C}-\vec{A}$, $\vec{D}-\vec{A}$ a tedy

$$\alpha(\vec{B}-\vec{A})+\beta(\vec{C}-\vec{A})+\gamma(\vec{D}-\vec{A})=\vec{0}\Rightarrow$$

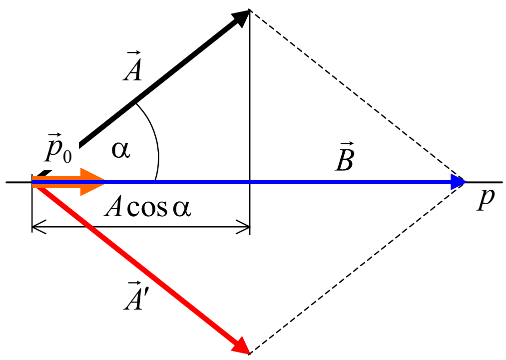
$$(-\alpha-\beta-\gamma)\vec{A}+\alpha\vec{B}+\beta\vec{C}+\gamma\vec{D}=\vec{0}.$$

Srovnáme-li obě podmínky komplanarity, dostaneme

$$k_1=-\alpha-\beta-\gamma,\ k_2=\alpha,\ k_3=\beta,\ k_4=\gamma.$$

Sečtením těchto výrazů dostaneme žádanou podmínku ve tvaru $\boxed{k_1+k_2+k_3+k_4=0}$

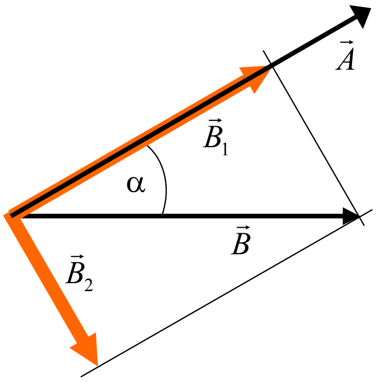
2.11 Najděte vektor, který je k danému vektoru $\vec{A}$ symetrický vzhledem k přímce určené jednotkovým vektorem $\vec{p}_0$.



$$\vec{A}\cdot\vec{p}_0=A\cos\alpha,\ \vec{B}=2(\vec{A}\cdot\vec{p}_0)\vec{p}_0,\ \vec{B}=\vec{A}+\vec{A}'\Rightarrow\vec{A}'=\vec{B}-\vec{A}\Rightarrow\boxed{\vec{A}'=2(\vec{A}\cdot\vec{p}_0)\vec{p}_0-\vec{A}}$$

2.12 Rozložte vektor $\vec{B}$ na dvě složky, z nichž jedna je rovnoběžná s daným vektorem $\vec{A}$ a druhá je k němu kolmá. $\left[\vec{B}_1=(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A}/A^2;\vec{B}_2=\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{A})/A^2\right]$

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2,\ \vec{B}_1\parallel\vec{A},\ \vec{B}_2\perp\vec{A}.$$



$$\vec{B}_1 = \left(\vec{B}\cdot\vec{A}_0\right)\vec{A}_0 = \left(\vec{B}\cdot\frac{\vec{A}}{A}\right)\frac{\vec{A}}{A} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A^2}\vec{A} \parallel \vec{A}}$$

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{A}\right) \perp \vec{A} \wedge \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{A}\right) \uparrow\uparrow \vec{B}_2;$$

$$\left|\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)\right| = ABA\sin\alpha\sin 90^\circ = A^2B\sin\alpha = A^2B_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B}_2 = \frac{\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)}{A^2} \perp \vec{A}}$$

2.13 Nechť $\vec{\ }\ \vec{\ }\ \vec{\ }$ jsou tři nekomplanární vektory. Libovolný vektor $\vec{D}$ lze vyjádřit ve tvaru $\vec{D} = k_1\vec{A} + k_2\vec{B} + k_3\vec{C}$, kde k_1, k_2, k_3 jsou reálná čísla. Určete jejich hodnotu.

Předpokládejme, že uvažované vektory jsou dány svými složkami: $\vec{A}\left(A_x, A_y, A_z\right)$, $\vec{B}\left(B_x, B_y, B_z\right)$, $\vec{C}\left(C_x, C_y, C_z\right)$, $\vec{D}\left(D_x, D_y, D_z\right)$. Vektorovou rovnici zapíšeme složkově jako soustavu tří rovnic o třech neznámých k_1, k_2, k_3

$$k_1A_x + k_2B_x + k_3C_x = D_x,$$
$$k_1A_y + k_2B_y + k_3C_y = D_y,$$
$$k_1A_z + k_2B_z + k_3C_z = D_z.$$

Tuto soustavu řešíme např. CRAMEROVÝM pravidlem. Determinant D soustavy je

$$D = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix} = A_xB_yC_z + A_yB_zC_x + A_zB_xC_y - A_zB_yC_x - A_xB_zC_y - A_yB_xC_z =$$

$$= A_x\left(B_yC_z - B_zC_y\right) + A_y\left(B_zC_x - B_xC_z\right) + A_z\left(B_xC_y - B_yC_x\right) \Rightarrow D = \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right);$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} D_x & B_x & C_x \\ D_y & B_y & C_y \\ D_z & B_z & C_z \end{vmatrix} = D_xB_yC_z + D_yB_zC_x + D_zB_xC_y - D_zB_yC_x - D_xB_zC_y - D_yB_xC_z \Rightarrow$$

$$D_1 = \vec{D}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A_x & D_x & C_x \\ A_y & D_y & C_y \\ A_z & D_z & C_z \end{vmatrix} = \cdots \Rightarrow D_2 = \vec{D}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right),\ D_3 = \vec{D}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).$$

$$k_1 = \frac{D_1}{D} \Rightarrow \boxed{k_1 = \frac{\vec{D}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)}{\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)}};\quad k_2 = \frac{D_2}{D} \Rightarrow \boxed{k_2 = \frac{\vec{D}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)}{\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)}}$$

$$k_3 = \frac{D_3}{D} \Rightarrow \boxed{k_3 = \frac{\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)}{\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)}}$$