3. Hilbertův prostor

3.1 Lineární vektorový prostor a skalární součin

3.1.1 Ověřte, že prostory $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{C}^N$ splňují axiomy lineárního vektorového prostoru.

3.1.2 Ověřte, že operace definované na $\mathbb{R}^N$ resp. $\mathbb{C}^N$ splňují axiomy skalárního součinu:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i y_i , \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N ,$$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y}_i , \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N .$$

3.1.3 Zjistěte, zda jsou zadané vektory lineárně závislé, či nezávislé.

a) $\mathbf{x} = [1,2,3]$, $\mathbf{y} = [3,2,1]$, $\mathbf{z} = [-1,1,1]$

b) $\mathbf{x} = [1,2,3]$, $\mathbf{y} = [i,2+i,-1]$, $\mathbf{z} = [1+2i,6+2i,1]$

3.1.4 Určete souřadnice zadaného vektoru **x** v bázi $\mathbf{e}_i$.

a) $\mathbf{x} = [1,1,1]$, $\mathbf{e}_1 = [1,1,0]$, $\mathbf{e}_2 = [-1,0,1]$, $\mathbf{e}_3 = [0,-1,-1]$

b) $\mathbf{x} = [1,1,1]$, $\mathbf{e}_1 = [i,1,0]$, $\mathbf{e}_2 = [-1,0,i]$, $\mathbf{e}_3 = [0,-i,-i]$

3.1.5 Pomocí Gramovy-Schmidtovy procedury ortonormalizujte níže uvedené systémy vektorů

a) $\mathbf{x} = [1,1]$, $\mathbf{y} = [-1,2]$

b) $\mathbf{x} = [1,1,0]$, $\mathbf{y} = [1,0,1]$, $\mathbf{z} = [0,1,1]$

c) $\mathbf{x} = [1,1]$, $\mathbf{y} = [-1,i]$

d) $\mathbf{x} = [1,i,0]$, $\mathbf{y} = [1,0,i]$, $\mathbf{z} = [0,i,1]$

3.2 Ortogonální systémy

3.2.1 Dokažte, že níže uvedené systémy jsou ortogonální na zadaném Hilbertově prostoru.

a) $\left\{e^{i2\pi nx/a}\right\}_{n=0}^{+\infty}$ na $L^{(\mathbb{C})}(0,a)$

b) $\left\{\sin(\pi n \frac{x}{a})\right\}_{n=1}^{+\infty}$ na $L^{(\mathbb{R})}(0,a)$ [1]

c) $\left\{\cos(\pi n \frac{x}{a})\right\}_{n=0}^{+\infty}$ na $L^{(\mathbb{R})}(0,a)$ [2]

3.2.2 Podle níže uvedeného vzorce nalezněte první čtyři Legendrovy polynomy a pro vybrané dvojice dokažte, že jsou ortogonální na $L^{(\mathbb{R})}(-1,1)$:

$$L_0(x) = 1, \quad L_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n .$$

3.2.3 Normalizujte níže zadané systémy funkcí (vektorů).

a) $\left\{e^{i2\pi nx/a}\right\}_{n=0}^{+\infty}$ na $L^{(\mathbb{C})}(0,a)$

b) $\left\{\sin(\pi n \frac{x}{a})\right\}_{n=1}^{+\infty}$ na $L^{(\mathbb{R})}(0,a)$

c) $\left\{\cos(\pi n \frac{x}{a})\right\}_{n=0}^{+\infty}$ na $L^{(\mathbb{R})}(0,a)$

d) $\left\{L_0(x) = 1, L_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n\right\}_{n=1}^{3}$ na $L^{(\mathbb{R})}(-1,1)$

3.2.4 Pomocí Gramovy-Schmidtovy procedury ortonormalizujte na $L^{(\mathbb{R})}(-1,1)$ systém funkcí (vektorů) $\left\{1,x,x^2,x^3\right\}$ a výsledek porovnejte s výrazy pro normalizované Legendrovy polynomy.

[1] **Návod**: Položte $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$.

[2] **Návod**: Položte $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$.