2. Mocninné řady

2.1 Konvergence mocninných řad

2.1.1 Pomocí d’Alembertova kritéria určete poloměr konvergence *R* níže uvedených mocninných řad a zjistěte, zda tyto řady konvergují v krajních bodech intervalu (-*R*, *R*)

a) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ b) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}x^k$ c) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k$ d) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0,6^k}{k}x^k$

2.1.2 Pomocí Cauchyho kritéria určete poloměr konvergence *R* níže uvedených mocninných řad a zjistěte, zda tyto řady konvergují v krajních bodech intervalu (-*R*, *R*)

a) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} 3^k x^k$ b) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} k^k x^k$ c) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k^k}$ d) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\ln^k k}x^k$

2.2 Algebraické operace s mocninnými řadami

2.2.1 Metodou neurčitých koeficientů nalezněte několik prvních členů řad vyjadřujících naznačenou operaci.

a) $S_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}x^k$, $S_2(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}x^k$, $S_1(x).S_2(x)$ b) $S_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}x^k$, $1/S_1(x)$

c) $S_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$, $S_2(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, $S_1(x)/S_2(x)$ d) $S_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}x^k$, $S_2(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}t^k$, $S_1(S_2(t))$

2.3 Derivování a integrování mocninných řad

2.3.1 Určete derivaci a integrál níže uvedených řad.

a) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}x^k$ b) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$ c) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ d) $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$

2.4 Taylorovy řady

2.4.1 Nalezněte Maclaurinovy řady níže uvedených funkcí a vyšetřete jejich konvergenci (poloměr konvergence a konvergenci k zadané funkci).

a) $f_n(x)=e^x$ b) $f_n(x)=\sin x$ c) $f_n(x)=\ln(x+1)$ d) $f_n(x)=\frac{1}{1+x}$

e) $f_n(x)=\operatorname{arctg} x$