

1. Posloupnosti a řady

1.1 Číselné posloupnosti

1.1.1 Určete limity níže uvedených posloupností

$$\text{a) } a_n = \frac{n^3 - n^2 + 1}{2n^3 - 3n^2 - 5} \quad \text{b) } a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} \quad \text{c) } \frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2-2}} \quad \text{d) } e^{\frac{n}{2n+1}}$$

1.1.2 Na základě znalosti $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ určete níže uvedené limity

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^n$$

1.2 Číselné řady

1.2.1 Určete, kdy je konvergentní a kdy divergentní aritmetická a geometrická řada.

1.2.2 Určete součty níže uvedených řad (dle potřeby diskutujte závislost výsledku na parametru x).

$$\text{a) geometrická, } a_2 = 9, a_4 = 1 \quad \text{b) aritmetická, } a_2 = 9, a_4 = 1 \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin x)^n \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

1.2.3 Určete

$$\text{a) } \sum_{n=2}^4 2 \ln n \quad \text{b) } \sum_{n=1}^7 \frac{n}{n+1} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^5 \sin \frac{n\pi}{4}$$

1.2.4 Pomocí d'Alembertova kritéria analyzujte konvergenci níže uvedených řad (dle potřeby diskutujte závislost výsledku na parametru x).

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 7n}{n^2 n!} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^{20}} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$$

1.2.5 Pomocí Cauchyho kritéria analyzujte konvergenci níže uvedených řad (dle potřeby diskutujte závislost výsledku na parametru x).

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{x^n} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^{2n}} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^n$$

1.2.6 Pomocí integrálního kritéria pro řady s nezápornými členy analyzujte konvergenci níže uvedených řad.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}, k \geq 2 \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n+1} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2}$$

1.3 Posloupnosti funkcí

1.3.1 Určete funkce, k nimž na zadaném intervalu bodově konvergují níže uvedené posloupnosti. Pokuste se odhadnout, zda se jedná o konvergenci stejnoměrnou.

$$\text{a) } f_n(x) = x^n, x \in \langle 0, 1 \rangle \quad \text{b) } f_n(x) = \sqrt[n]{x}, x \in \langle 0, 1 \rangle \quad \text{c) } f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}, x \in \langle 0, \pi \rangle \quad \text{d) } f_n(x) = e^{-nx^2}, x \in \langle -1, 1 \rangle$$