1 Křivky

Příklad 1
Ověřte, zda bod P náleží geometrickému obrazu křivky $\vec{\varphi}$.

- $\mathrm{P} = [1, \sqrt{3}]$, $\vec{\varphi} = [2\cos t, -2\sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
- $\mathrm{P} = [-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$, $\vec{\varphi} = [4\sin t, 2\cos t]$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$
- $\mathrm{P} = [2, 2\sqrt{2}]$, $\vec{\varphi} = [t^2 - 2t + 1, t^2 - 4t + 1]$, $t \in \langle -1, 0\rangle$
- $\mathrm{P} = [2, 0]$, $\vec{\varphi} = [\log(20t + 40), \ln(7 - 2t)]$, $t \in \langle 0, 2\rangle$
- $\mathrm{P} = [5, -3/2, 2]$, $\vec{\varphi} = [2t - 1, -t/2, 1 - t]$, $t \in \langle 2, 4\rangle$

Příklad 2
Nalezněte průnik (průsečíky) geometrických obrazů křivek $\vec{\varphi}$ a $\vec{\psi}$.

- $\vec{\varphi} = [s + 3, 1 - 2s]$, $\vec{\psi} = [3t - 1, 3t + 1]$, $s \in \langle -1, 0\rangle$, $t \in \langle 0, 2\rangle$
- $\vec{\varphi} = [2s + 1, s - 2, s + 3]$, $\vec{\psi} = [2t - 2, t + 1, -t - 1]$, $s \in \langle -1, 1\rangle$, $t \in \langle 0, 1\rangle$
- $\vec{\varphi} = [\cos s, \sin s]$, $\vec{\psi} = [t, 2t + 1]$, $s \in \langle \pi/2, 5\pi/2\rangle$, $t \in \langle -1, 1\rangle$
- $\vec{\varphi} = [s + 1, s^2 - 1]$, $\vec{\psi} = [t + 1, t - 1]$, $s \in \langle -1, 1\rangle$, $t \in \langle 0, 1\rangle$

Příklad 3
Geometrický obraz křivky $\vec{\varphi} = [x(t), y(t)]$ popište funkčními závislostmi $y = f(x)$ nebo $x = g(y)$. Kde je to možné, nalezněte obě funkční závislosti.

- $\vec{\varphi} = [\cos t, -\sin t]$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$
- $\vec{\varphi} = [\cos t, -\sin t]$, $t \in \langle \pi/2, 3\pi/2\rangle$
- $\vec{\varphi} = [t^2, t^3]$, $t \in \langle -2, -1\rangle$
- $\vec{\varphi} = [t^2 - 1, 1 + \ln t]$, $t \in \langle 1, e\rangle$

Příklad 4
Nalezněte alespoň jednu křivku $\vec{\varphi} = [x(t), y(t)]$, jejíž geometrický obraz odpovídá funkčním závislostem $y = f(x)$, resp. $x = g(y)$.

- $y = 2x + 1$, $x \in \langle 0, 10\rangle$
- $x = 3y - 6$, $y \in \langle -1, 0\rangle$
- $y = 3x^2 + 5x - 1$, $x \in \langle -2, 1\rangle$
- $x = \cos y$, $y \in \langle -\pi/2, \pi\rangle$

Příklad 5
Nalezněte parametrickou rovnici tečny ke křivce $\vec{\varphi}$ v bodě T.

- $\vec{\varphi} = [4t + 5, -t - 1]$, $\mathrm{T} = [45, -11]$

- $\vec{\varphi} = [4\cos t, 2\sin t]$, $\mathrm{T} = [2\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$
- $\vec{\varphi} = [\sin t, \cos t, t]$, $\mathrm{T} = [0, -1, \pi]$
- $\vec{\varphi} = [t, t^2, t^3]$, $\mathrm{T} = [2, 4, 8]$

Příklad 6
Určete úhel, který svírají tečny k zadaným křivkám v průsečíku jejich geometrických obrazů.

- $\vec{\varphi} = [s+1, 1-s]$, $\vec{\psi} = [t^2, 2t^2]$, $s \in \langle -1, 1\rangle$, $t \in \langle -1, 1\rangle$
- $\vec{\varphi} = [\cos s, \sin s]$, $\vec{\psi} = [3t, 4t]$, $s \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $t \in \langle 0, 1\rangle$
- $\vec{\varphi} = [s, s^3]$, $\vec{\psi} = [t^3, t]$, $s \in \langle -1/2, 3/2\rangle$, $t \in \langle -1/2, 3/2\rangle$

2 Křivkový integrál prvního druhu

Příklad 1
Vypočítejte křivkové integrály prvního druhu $\int_{\vec{\varphi}} f d\varphi$.

- $\vec{\varphi} = [3t-2, 2t+1, 6t]$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$, $f(x,y,z) = x+y+z$
- $\vec{\varphi} = [a_x + b_x t, a_y + b_y t, a_z + b_z t]$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, $f(x,y,z) = Ax + By + Cz + D$, a_k, b_k, A, B, C, D, t_1 a t_2 jsou zadané konstanty, $t_1 < t_2$
- $\vec{\varphi} = [\cos t, \sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $f(x,y) = x^2 - y^2$
- $\vec{\varphi} = [R\cos t, R\sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $f(x,y) = g(\sqrt[3]{x^2+y^2})$, R je zadaná kladná konstanta, g zadaná reálná funkce jedné reálné proměnné
- $\vec{\varphi} = [\sin t, \cos t, t/\pi]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $f(x,y,z) = xyz$
- $\vec{\varphi} = [\frac{1}{2}R\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}R\sin t, R\cos t]$, $t \in \langle \pi/4, 3\pi/4 \rangle$, $f(x,y) = g(\frac{x}{y})$, R je zadaná kladná konstanta, g zadaná reálná funkce jedné reálné proměnné

Příklad 2
Pomocí *křivkového integrálu prvního druhu* určete

- délku úsečky spojující body $[1,2,3]$ a $[3,2,1]$
- délku úsečky spojující body $[a_x, a_y, a_z]$ a $[b_x, b_y, b_z]$, a_k a b_k jsou zadané konstanty
- obvod kružnice o poloměru R
- obvod obdélníka o stranách a a b
- obvod trojúhelníka o vrcholech $[0,0]$, $[0,a]$ a $[b_1, b_2]$

a porovnejte je se vztahy známými z elementární geometrie.

3 Křivkový integrál druhého druhu

Příklad 1
Vypočítejte křivkové integrály druhého druhu $\int_{\vec{\varphi}} \vec{F} \cdot d\vec{\varphi}$.

- $\vec{\varphi} = [t, t^2]$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, $\vec{F}(x, y) = [x - y, x + y]$
- $\vec{\varphi} = [\cos t, \sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\vec{F}(x, y) = [x, y]$
- $\vec{\varphi} = [\cos t, \sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\vec{F}(x, y) = [-y, x]$
- $\vec{\varphi} = [2\cos t, 0, -3\sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\vec{F}(x, y, z) = [\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\vec{\varphi} = [1 + 2t, 2 - t, 2 + t]$, $t \in \langle 1, 2 \rangle$, $\vec{F}(x, y, z) = [x, y, z]$
- $\vec{\varphi} = [t, t, t]$, $t \in \langle 1, 3 \rangle$, $\vec{F}(x, y, z) = [\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Příklad 2
Vypočítejte křivkové integrály druhého druhu $\int_{\vec{\varphi}} \vec{F} \cdot d\vec{\varphi}$.

- $\vec{\varphi} = [R\cos t, R\sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\vec{F}(x, y) = [k_x x, k_y y]$, R je zadaná kladná konstanta a k_x a k_y zadané konstanty
- $\vec{\varphi} = [a_x + b_x t, a_y + b_y t, a_z + b_z t]$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, $\vec{F}(x, y, z) = [k_x x, k_y y, k_z z]$, a_j, b_j a k_j jsou zadané konstanty
- $\vec{\varphi} = [a\cos t, b\sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\vec{F}(x, y) = [\frac{x}{r}, \frac{y}{r}]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, a a b jsou zadané kladné konstanty
- $\vec{\varphi} = [t, t, t]$, $t \in \langle \frac{R_1}{\sqrt{3}}, \frac{R_2}{\sqrt{3}} \rangle$, $\vec{F}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}[\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, R_1, R_2 a ε jsou zadané kladné konstanty ($R_1 < R_2$), Q zadaná konstanta
- $\vec{\varphi} = [R\cos t, R\sin t, 0]$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $\vec{F}(x, y, z) = \vec{A} \times \vec{r}$, $\vec{r} = [x, y, z]$, $\vec{A}$ je zadaný konstantní vektor, α a β zadané konstanty z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ ($\alpha < \beta$)

4 Potenciál vektorového pole

Příklad 1
Ukažte, že níže uvedená vektorová pole nemají potenciál.

- $\vec{F} = [-y, x]$
- $\vec{F} = [1, 1, 1] \times [x, y, z]$
- $\vec{F} = \vec{A} \times \vec{r}$, $\vec{A}$ je konstantní nenulový vektor a $\vec{r} = [x, y, z]$
- $\vec{F} = [-x_2, x_1, x_4, -x_3]$

Příklad 2
Určete, za jakých podmínek mají níže uvedená vektorová pole potenciál.

- $\vec{F} = [ax + by, cx + dy]$, a, b, c a d jsou zadané konstanty
- $\vec{F} = [ax + by + cz, kx + ly + mz, px + qy + rz]$, a, b, c, k, l, m, p, q a r jsou zadané konstanty
- $\vec{F} = \vec{A} \times \vec{r}$, $\vec{A}$ je zadaný konstantní vektor a $\vec{r} = [x, y, z]$
- $\vec{F} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{r})$, $\vec{A}$ a $\vec{B}$ jsou zadané konstantní vektory, $\vec{r} = [x, y, z]$
- $\vec{F} = \vec{A} f(x, y, z)$, $\vec{A}$ je zadaný konstantní vektor a f zadaná reálná diferencovatelná funkce tří reálných proměnných [1]

Příklad 3
Pro zadaná vektorová pole nalezněte *bez použití křivkových integrálů* potenciál.

- $\vec{F} = [-1, 1]$
- $\vec{F} = [a, b]$, a a b jsou zadané konstanty
- $\vec{F} = [2x, 3y]$
- $\vec{F} = [ax, by]$, a a b jsou zadané konstanty
- $\vec{F} = [a, b, c]$, a, b a c jsou zadané konstanty
- $\vec{F} = [ax, by, cz]$, a, b a c jsou zadané konstanty
- $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^2}$, $\vec{r} = [x, y]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r} = [x, y, z]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\vec{F} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, a_k jsou zadané konstanty
- $\vec{F} = [a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n]$, a_k jsou zadané konstanty

[1] Nalezněte alespoň jednu takovou funkci.

Příklad 4
Pro zadaná vektorová pole nalezněte *pomocí křivkových integrálů* potenciál.

- $\vec{F} = [-1, 1]$ [2]
- $\vec{F} = [a, b]$ [3]
- $\vec{F} = [2x, 3y]$ [2]
- $\vec{F} = [ax, by]$, a a b jsou zadané konstanty [3]
- $\vec{F} = [ax, by, cz]$, a, b a c jsou zadané konstanty [4]

Příklad 5
Pomocí křivkových integrálů nalezněte rozdíl $U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$, kde U označuje potenciál níže zadaných polí.

- $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^2}$, $\vec{r} = [x, y]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{r}_2 = [b, b]$, $\vec{r}_1 = [a, a]$, a a b jsou nenulové konstanty stejného znaménka (obě kladné, nebo obě záporné) [5]
- $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r} = [x, y, z]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r}_2 = [b, b, b]$, $\vec{r}_1 = [a, a, a]$, a a b jsou nenulové konstanty stejného znaménka (obě kladné, nebo obě záporné) 5
- $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^2}$, $\vec{r} = [x, y]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{r}_2 = [a\cos\beta, a\sin\beta]$, $\vec{r}_1 = [a\cos\alpha, a\sin\alpha]$, a je kladná konstanta, α a β konstanty z intervalu $\langle 0, 2\pi)$[6]

[2] Pevně zvolený počáteční bod $[0, 0]$ spojte s obecným bodem $[x, y]$ úsečkou.
[3] Pevně zvolený počáteční bod $[x_0, y_0]$ spojte s obecným bodem $[x, y]$ úsečkou.
[4] Pevně zvolený počáteční bod $[x_0, y_0, z_0]$ spojte s obecným bodem $[x, y, z]$ úsečkou.
[5] Koncový a počáteční bod spojte úsečkou.
[6] Koncový a počáteční bod spojte kruhovým obloukem.

5 Plochy

Příklad 1
Ověřte, zda bod P náleží geometrickému obrazu plochy $\vec{\sigma}$.

- P $= [1, 2, 3]$, $\vec{\sigma} = [t - 2s, t + s, t - s]$, $s \in \langle -1, 1\rangle$, $t \in \langle 0, 3\rangle$
- P $= [1, 5/8, 1/2]$, $\vec{\sigma} = [t + s, t^2 + s^2, t^2 - s^2]$, $s \in \langle 0, 1\rangle$, $t \in \langle 0, 1\rangle$
- P $= [1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $\vec{\sigma} = [\cos t \cos s, \sin t \cos s, \sin s]$, $s \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
- P $= [1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $\vec{\sigma} = [\cos t \cos s, \sin t \cos s, \sin s]$, $s \in \langle 0, \pi/2\rangle$, $t \in \langle \pi/2, \pi\rangle$
- P $= [1, 0, -3/2]$, $\langle\vec{\sigma}\rangle = \{[x, y, z] : \frac{x}{2}^2 + \frac{y}{1}^2 + \frac{z}{3}^2 = 1\}$
- P $= [2, -1, 1]$, $\langle\vec{\sigma}\rangle = \{[x, y, z] : ax - 2y + 6z - 1 = 0\}$, kde a je zadaný parametr

Příklad 2
Nalezněte průnik geometrických obrazů ploch $\vec{\sigma}$ a $\vec{\rho}$. Výsledek zapište pomocí běžné množinové symboliky.

- $\vec{\sigma} = [s+t, s-t, 2+s-t]$, $s \in \langle 0, 1\rangle$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, $\vec{\rho} = [1+u, 2-u+v, 2v]$, $u \in \langle -2, 1\rangle$, $v \in \langle -1, 2\rangle$
- $\vec{\sigma} = [2\cos t \sin s, 2\sin t \sin s, 2\cos s]$, $s \in \langle 0, \pi/2\rangle$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $\vec{\rho} = [u+v, v-u, -1]$, $u \in \langle 0, 1\rangle$, $v \in \langle -1, 1\rangle$
- $\vec{\sigma} = [2\cos t \sin s, 2\sin t \sin s, 2\cos s]$, $s \in \langle 0, \pi/2\rangle$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $\vec{\rho} = [u, v, 1]$, $u \in \langle -2, 2\rangle$, $v \in \langle -2, 2\rangle$
- $\vec{\sigma} = [t\cos s, t\sin s, 2t]$, $s \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $t \in \langle 0, 3\rangle$, $\langle\vec{\rho}\rangle = \{[x, y, z] : x + y = 1\}$
- $\langle\vec{\sigma}\rangle = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\}$, $\langle\vec{\rho}\rangle = \{[x, y, z] : y = 2\}$
- $\langle\vec{\sigma}\rangle = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\}$, $\langle\vec{\rho}\rangle = \{[x, y, z] : y = 1\}$

Příklad 3
Nalezněte implicitní a explicitní zadání ploch. Plochy pojmenujte.

- $\vec{\sigma} = [a_x + \tau_{1x}s + \tau_{2x}t, a_y + \tau_{1y}s + \tau_{2y}t, a_z + \tau_{1z}s + \tau_{2z}t]$, $s \in \langle s_i, s_f\rangle$, $t \in \langle t_i, t_f\rangle$, $\vec{a}$, $\vec{\tau_1}$, $\vec{\tau_2}$ jsou zadané reálné vektory a t_i, t_f, s_i a s_f zadané reálné konstanty
- $\vec{\sigma} = [R_1 \cos t \sin s, R_2 \sin t \sin s, R_3 \cos s]$, $s \in \langle 0, \pi\rangle$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, R_k jsou zadané kladné konstanty
- $\vec{\sigma} = [R\cos s, R\sin s, t]$, $s \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $t \in \langle 0, h\rangle$, R a h jsou zadané kladné konstanty
- $\vec{\sigma} = [R\frac{t}{h}\cos s, R\frac{t}{h}\sin s, t]$, $s \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $t \in \langle 0, h\rangle$, R a h jsou zadané kladné konstanty
- $\vec{\sigma} = [(R_1 + (R_2 - R_1)\frac{t}{h})\cos s, (R_1 + (R_2 - R_1)\frac{t}{h})\sin s, t]$, $s \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $t \in \langle 0, h\rangle$, R_k a h jsou zadané kladné konstanty

Příklad 4
Pro plochy z předcházejícího příkladu nalezněte v každém jejich bodě všechny normálové vektory a všechny normálové vektory jednotkové délky. Nalezněte též body, v nichž to není možné.

Příklad 5
Pro plochy z příkladu 3 nalezněte v každém jejich bodě parametrické a normálové vyjádření tečné roviny. Nalezněte body, v nichž to není možné.

6 Plošný integrál prvního druhu

Příklad 1
Vypočítejte plošné integrály prvního druhu $\iint_{\vec{\sigma}} f d\sigma$.

- $f(x,y,z) = xyz$, $\vec{\sigma} = [\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v]$, $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle 0, \pi/2 \rangle$
- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\vec{\sigma} = [2\cos u \sin v, 2\sin u \sin v, 2\cos v]$, $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle 0, \pi/2 \rangle$
- $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, $\vec{\sigma} = [R_0 \cos u \sin v, R_0 \sin u \sin v, R_0 \cos v]$, $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, g je zadaná funkce jedné reálné proměnné a R_0 zadaná kladná konstanta
- $f(x,y,z) = z^2$, $\vec{\sigma} = [\cos u, \sin u, v]$, $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle -1/2, 1/2 \rangle$
- $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, $\vec{\sigma} = [R_0 \cos u, R_0 \sin u, v]$, $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle -h/2, h/2 \rangle$, g je zadaná funkce jedné reálné proměnné a R_0 a h jsou zadané kladné konstanty

Příklad 2
Pomocí plošného integrálu prvního druhu určete plošný obsah:

- povrchu koule o poloměru R
- pláště válce o poloměru R a výšce h
- podstavy válce o poloměru R
- pláště kužele o poloměru R a výšce h
- podstavy krychle o hraně a
- části roviny $\vec{\sigma} = [u + v, u - v, u]$, $u \in \langle 0, 1 \rangle$, $v \in \langle 0, 1 \rangle$ [7]

[7] Obrazec načrtněte.

7 Plošný integrál druhého druhu

Příklad 1
Vypočítejte plošné integrály druhého druhu $\iint_{\vec{\sigma}} \vec{F}.d\vec{\sigma}$. Výpočet proveďte pro obě orientace normálového vektoru.

- $\vec{F}(x,y,z) = [x,y,z]$, $\vec{\sigma} = [u+v, 2u-v, u+v]$, $u \in \langle 0,1\rangle$, $v \in \langle 0,1\rangle$
- $\vec{F}(x,y,z) = [x,y,z]$, $\vec{\sigma} = [\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v]$, $u \in \langle 0,2\pi\rangle$, $v \in \langle \pi/2,\pi\rangle$
- $\vec{F}(x,y,z) = [x,y,z]$, $\vec{\sigma} = [2\cos u, 2\sin u, v]$, $u \in \langle 0,2\pi\rangle$, $v \in \langle -1,1\rangle$
- $\vec{F}(x,y,z) = [-y,x,0]$, $\vec{\sigma} = [2\cos u, 2\sin u, v]$, $u \in \langle 0,2\pi\rangle$, $v \in \langle -1,1\rangle$
- $\vec{F}(x,y,z) = [x,y,z]$, $\vec{\sigma} = [v\cos u, v\sin u, 1]$, $u \in \langle 0,2\pi\rangle$, $v \in \langle 0,1\rangle$
- $\vec{F}(x,y,z) = [-y,x,0]$, $\vec{\sigma} = [v\cos u, v\sin u, 1]$, $u \in \langle 0,2\pi\rangle$, $v \in \langle 0,1\rangle$

Příklad 2
Vypočítejte plošné integrály druhého druhu $\iint_{\vec{\sigma}} \vec{F}.d\vec{\sigma}$ přes uzavřenou plochu $\vec{\sigma}$. Jako normálový vektor zvolte vektor vnější normály.

- $\vec{F}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}[x,y,z]$, $\vec{\sigma} = [R\cos u \sin v, R\sin u \sin v, R\cos v]$, $u \in \langle 0,2\pi\rangle$, $v \in \langle 0,\pi\rangle$, Q, ε a R jsou zadané konstanty $(\varepsilon, R > 0)$
- $\vec{F}(x,y,z) = \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{x^2+y^2}[x,y,0]$, $\vec{\sigma} = [R\cos u, R\sin u, v]$, $u \in \langle 0,2\pi\rangle$, $v \in \langle 0,h\rangle$, κ, ε, R a h jsou zadané konstanty $(\varepsilon, R, h > 0)$
- $\vec{F}(x,y,z) = \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{x^2+y^2}[x,y,0]$, $\vec{\sigma} = [u\cos v, u\sin v, h]$, $u \in \langle 0,R\rangle$, $v \in \langle 0,2\pi\rangle$, κ, ε, R a h jsou zadané konstanty $(\varepsilon, R, h > 0)$

Příklad 3
Vypočítejte plošný integrál druhého druhu $\iint_{\vec{\sigma}} \vec{F}.d\vec{\sigma}$ přes uzavřenou plochu $\vec{\sigma}$. Jako normálový vektor zvolte vektor vnější normály.

- $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{2}(\vec{A}\times\vec{r})$, $\vec{\sigma} = [R\cos u \sin v, R\sin u \sin v, R\cos v]$, $u \in \langle 0,2\pi\rangle$, $v \in \langle 0,\pi\rangle$, kde $\vec{r} = [x,y,z]$, $\vec{A}$ je zadaný konstantní vektor a R zadaná kladná konstanta

8 Křivočaré souřadnice

Příklad 1
Určete

- polární souřadnice bodu A, jehož kartézské souřadnice jsou $x_{\mathrm{A}} = 4$ a $y_{\mathrm{A}} = 6$,
- sférické souřadnice bodu A, jehož kartézské souřadnice jsou $x_{\mathrm{A}} = 1$, $y_{\mathrm{A}} = 1$ a $z_{\mathrm{A}} = 2$,
- sférické souřadnice bodu A, jehož válcové souřadnice jsou $r_{\mathrm{A}} = 2$, $\varphi_{\mathrm{A}} = 2\pi/3$ a $z_{\mathrm{A}} = 2$.

Příklad 2
Ukažte, že válcové a sférické souřadnice jsou ortogonální.

Příklad 3
Určete metrický tenzor ve válcových a sférických souřadnicích.

Příklad 4
Pomocí vyjádření operátoru gradientu v polárních souřadnicích určete $\nabla\frac{1}{r^2}$ a porovnejte s výsledkem, který získáte pro $\nabla\frac{1}{x^2+y^2}$ výpočtem v kartézských souřadnicích. [8]

Příklad 5
Pomocí vyjádření operátoru divergence v polárních souřadnicích určete $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^2}$ a porovnejte s výsledkem, který získáte pro $\operatorname{div}(\frac{1}{x^2+y^2}[x,y])$ výpočtem v kartézských souřadnicích. [8]

Příklad 6
Pomocí vyjádření Laplaceova operátoru v polárních souřadnicích určete $\Delta\frac{1}{r^2}$ a porovnejte s výsledkem, který získáte pro $\Delta\frac{1}{x^2+y^2}$ výpočtem v kartézských souřadnicích.

[8] Pozor na odlišnost kartézské a lokální křivočaré báze.