TROJNÉ INTEGRÁLY NA INTERVALECH

PŘÍKLAD 1

Vypočítejte $\iiint\limits_{K} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $K = \langle 0;1\rangle \times \langle 1;2\rangle \times \langle 2;3\rangle$.

Řešení

Podobně jako v případě dvojných integrálů i k výpočtu trojného integrálu, tentokrát ale na trojrozměrném intervalu $K = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,g\rangle$, využíváme Fubiniovu větu

$$\iiint\limits_{K} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_e^g f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \ldots,$$

kde tečkami naznačujeme možnou záměnu pořadí integrování podle jednotlivých integračních proměnných. Volba pořadí postupných integrací na pravé straně je ponechána zcela na naší libovůli a je podřízena obvykle požadavku maximálního zjednodušení výpočtu.

Pro naše konkrétní zadání platí

- $f(x,y,z) = xyz$,
- $K = \langle 0;1\rangle \times \langle 1;2\rangle \times \langle 2;3\rangle$, čili $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 2$, $e = 2$ a $g = 3$,

můžeme proto psát např.

$$\iiint\limits_{K} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\left(\int_1^2\left(\int_2^3 xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Ve vnitřním integrálu pravé strany je integrační proměnnou *z*, na *x* a *y* tedy pohlížíme jako na konstanty

- $\int_2^3 xyz\,\mathrm{d}z = xy\int_2^3 z\,\mathrm{d}z = xy\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_2^3 = \tfrac{1}{2}xy\cdot(9-4) = \tfrac{5}{2}xy$.

Podobně postupujeme i při výpočtu středního a vnějšího integrálu

- $\int_1^2\left(\int_2^3 xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y = \int_1^2 \tfrac{5}{2}xy\,\mathrm{d}y = \tfrac{5}{2}x\int_1^2 y\,\mathrm{d}y = \tfrac{5}{2}x\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_1^2 = \tfrac{5}{4}x\cdot(4-1) = \tfrac{15}{4}x$,
- $\int_0^1\left(\int_1^2\left(\int_2^3 xyz\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \tfrac{15}{4}x\,\mathrm{d}x = \tfrac{15}{4}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \tfrac{15}{8}\cdot(1-0) = \tfrac{15}{8}$

a na závěr můžeme psát

$$\underline{\underline{\iiint\limits_{K} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \tfrac{15}{8}}}.$$

Při použití Fubiniovy věty bychom mohli dát přednost i jinému pořadí postupných integrací na pravé straně obecného vzorce (celkem 5 dalších možností). Doporučujeme čtenáři, aby si některé z alternativních výpočtů provedl samostatně.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1. Pomocí Fubiniovy věty vypočítejte následující trojné integrály:

a) $\iiint\limits_M 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M} = \langle 0;1\rangle \times \langle 0;2\rangle \times \langle 0;3\rangle$;

b) $\iiint\limits_M (x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M} = \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$;

c) $\iiint\limits_M xz\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M} = \langle 0;1\rangle \times \langle 0;\frac{\pi}{4}\rangle \times \langle 0;1\rangle$;

d) $\iiint\limits_M \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M} = \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$;

e) $\iiint\limits_M \sin(x+y)\sin(y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M} = \langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle \times \langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$; [1]

f) $\iiint\limits_M A\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M} = \langle a_1;a_2\rangle \times \langle b_1;b_2\rangle \times \langle c_1;c_2\rangle$; $A, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ jsou zadané konstanty;

g) $\iiint\limits_M x^n y^n z^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M} = \langle -\Delta_x;\Delta_x\rangle \times \langle -\Delta_y;\Delta_y\rangle \times \langle -\Delta_z;\Delta_z\rangle$; n je přirozené číslo a $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ jsou zadané kladné konstanty; [2]

●h) $\iiint\limits_M \cos(k_x x + k_y y + k_z z + \varphi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M} = \langle 0;2\pi/k_x\rangle \times \langle 0;2\pi/k_y\rangle \times \langle 0;2\pi/k_z\rangle$, kde k_x, k_y, k_z jsou zadané nenulové konstanty.

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1a) 6,

1b) $\dfrac{3}{2}$,

1c) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$,

1d) $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^3$,

1e) π,

1f) $A(a_2-a_1)(b_2-b_1)(c_2-c_1)$,

1g) sudé n: $\dfrac{8(\Delta_x\Delta_y\Delta_z)^{n+1}}{(n+1)^3}$,
liché n: 0

1h) 0.

---

[1] Integrujte v pořadí x, z, y.

[2] Výpočet rozdělte do dvou větví – pro lichá a pro sudá n.