LOKÁLNÍ EXTRÉMY

PŘÍKLAD 1

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ a určete jejich typ.

Řešení

Body, v nichž jediných můžeme lokální extrémy očekávat, hledáme jako nulové body parciálních derivací. Nejdříve tedy musíme řešit rovnice

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}\right) = \underline{y - \dfrac{2}{x^2} = 0}$,
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}\right) = \underline{x - \dfrac{4}{y^2} = 0}$.

Snadno zjistíme, že na definičním oboru funkce *f*, $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2 - \{[a,b] : a = 0 \vee b = 0\}$, existuje jediné řešení těchto rovnic

$$x_1 = 1 \quad \text{a} \quad y_1 = 2 .$$

To, zda má zadaná funkce v tomto bodě lokální maximum či minimum, ověříme pomocí vlastních čísel symetrické matice[1]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) \end{pmatrix}.$$

Protože platí

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{4}{x^3}, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = \dfrac{4}{1^3} = 4$,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x - \dfrac{4}{y^2}\right) = \dfrac{8}{y^3}, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = \dfrac{8}{2^3} = 1$,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y - \dfrac{2}{x^2}\right) = 1, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = 1$,

můžeme psát

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a snadno zjistíme, že vlastní čísla této matice jsou

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{4}\left(5 \pm \sqrt{13}\right).$$

Protože jsou obě vlastní čísla kladná, odpovídá matice **A** pozitivně definitní kvadratické formě, a funkce *f* má tedy v bodě [1,2] <u>lokální minimum</u>.

[1] Konstantní koeficient ½ u jednotlivých maticových elementů bychom mohli vypustit. Nezajímají nás totiž hodnoty vlastních čísel uvedené matice, ale jen jejich znaménka. Ta se vynásobením matice kladnou konstantou (např. 2) nezmění. Kontrolní výpočet bez koeficientu ½ proveďte samostatně.

PŘÍKLAD 2

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 2z$ a určete jejich typ.

Řešení

Postup při nalezení lokálních extrémů je stejný jako v příkladu 1. Nejdříve hledáme nulové body prvních parciálních derivací

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 2z\right) = \underline{2x - 2 = 0}$,
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 2z\right) = \underline{2y = 0}$,
- $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 2z\right) = \underline{-2z + 2 = 0}$.

Snadno nahlédneme, že jediným řešením získaných rovnic, a tedy i jediným bodem, v němž může zadaná funkce svého lokálního extrému nabývat, je

$$x_1 = 1,\quad y_1 = 0 \quad \text{a} \quad z_1 = 1.$$

Ověření, zda tento bod je skutečně bodem lokálního extrému, provedeme pomocí druhých derivací, přesněji pomocí znamének vlastních čísel matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0,1) & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0,1) & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,0,1) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0,1) & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0,1) & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,0,1) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,0,1) & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,0,1) & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,0,1) \end{pmatrix}.$$

Čtenář jistě sám snadno ověří, že matice **A** má v tomto příkladu tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a snadno též nalezne její vlastní čísla

$$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 1 \quad \text{a} \quad \lambda_3 = -1.$$

Protože první a třetí vlastní číslo mají opačná znaménka, je kvadratická forma odpovídající matici **A** indefinitní a funkce f v bodě (1,0,-1), ani v žádném jiném, <u>lokální extrém nemá</u>.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2

1. Nalezněte lokální extrémy zadaných funkcí a určete jejich typ.

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, b) $f(x,y) = xye^{-(3x+2y)}$,

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 6$, d) $f(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

PŘÍKLAD 3
Který kvádr zadaného objemu V má minimální povrch?

Řešení
Formulace zadání příkladu naznačuje, že úloha povede na hledání extrému jisté funkce; očekáváme, že se bude jednat o funkci více reálných proměnných. Nejdříve musíme tuto funkci najít.

Objem V a povrch S kvádru o hranách a, b a c počítáme podle elementárních vzorců

$$V = abc$$
$$S = 2ab + 2ac + 2bc\,.$$

Protože je objem kvádru dán, nejsou jeho hrany navzájem nezávislé, ale můžeme psát např.

$$c = \frac{V}{ab}\,.$$

Po dosazení do vzorce pro povrch získáme tedy

$$S = 2ab + 2a\frac{V}{ab} + 2b\frac{V}{ab} = 2ab + 2\frac{V}{b} + 2\frac{V}{a}$$

a povrch kvádru se takto stává funkcí dvou reálných proměnných [2]

$$S(a,b) = 2ab + 2\frac{V}{b} + 2\frac{V}{a}\,,$$

jejíž extrémy máme vyšetřit. V dalším výpočtu se omezíme jen na extrémy lokální, vyšetřovat globální extrémy funkcí více reálných proměnných je v tuto chvíli mimo naše možnosti.

Další postup je již stejný jako v příkladu 1.[3] Nejdříve hledáme nulové body prvních parciálních derivací funkce S

- $$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(2ab + 2\frac{V}{b} + 2\frac{V}{a}\right) = \underline{2b - 2\frac{V}{a^2} = 0}\,,$$
- $$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(2ab + 2\frac{V}{b} + 2\frac{V}{a}\right) = \underline{2a - 2\frac{V}{b^2} = 0}\,.$$

Řešením obou rovnic získáme ($a, b \neq 0$)

$$a = \sqrt[3]{V} \text{ a } b = \sqrt[3]{V}\,.$$

Jedině v tomto bodě může povrch kvádru S nabývat svého lokálního extrému. Ověření, zda tomu tak je, provedeme pomocí znamének vlastních čísel matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}) & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}) & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}) \end{pmatrix}.$$

Snadno zjistíme, že

- $$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a}\left(2b - 2\frac{V}{a^2}\right) = 4\frac{V}{a^3},\ \frac{\partial^2 S}{\partial a^2}(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V}) = 4\frac{V}{\sqrt[3]{V}^3} = 4\,,$$

---

[2] Objem V je sice blíže neurčená, ale přece jen konstanta, číslo.
[3] Nedejme se mýlit označením proměnných a a b místo obvyklého x a y!

- $\dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} = \dfrac{\partial}{\partial b}\left(2a - 2\dfrac{V}{b^2}\right) = 4\dfrac{V}{b^3}$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2}(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 4\dfrac{V}{\sqrt[3]{V}^3} = 4$,
- $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = \dfrac{\partial}{\partial b}\left(2b - 2\dfrac{V}{a^2}\right) = 2$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 2$

a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice **A**

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{a} \quad \lambda_2 = 1$$

jsou obě kladná, povrch *S* tedy pro hrany $a = b = \sqrt[3]{V}$ nabývá své minimální hodnoty. Protože pro $a = b = \sqrt[3]{V}$ je i $c = \sqrt[3]{V}$, můžeme uzavřít tvrzením, že kvádr zadaného objemu a s nejmenším povrchem je krychle.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 3

●●1. Který kvádr zadaného povrchu *S* má maximální objem?
2. Pro který bod C = [*x*,*y*,0] v souřadnicové rovině xy je součet délek úseček AC a CB minimální? A = [-1,0,2] a B = [1,0,2]

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2

1a)	$[0,0]$,	sedlový bod,[4]	1b)	$[0,0]$,	sedlový bod,[4]
	$[1,1]$,	lokální minimum;		$\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$,	lokální minimum;
1c)	$[1,-2,-1]$,	lokální minimum;	1d)	$[6,4,10]$,	sedlový bod.[4]

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 3

1) Krychle o straně $a = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$,

2) $[0,0,0]$.

[4] Tzn. funkce v tomto bodě nemá lokální extrém.