KVADRATICKÉ FORMY

PŘÍKLAD 1

Nalezněte funkční předpis kvadratické formy $F(z_1, z_2)$ zadané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Pro obecnou kvadratickou formu dvou proměnných platí

$$F(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} A_{ij} z_i z_j = A_{11}z_1z_1 + A_{12}z_1z_2 + A_{21}z_2z_1 + A_{22}z_2z_2 = A_{11}z_1^{\ 2} + A_{22}z_2^{\ 2} + 2A_{12}z_1z_2 ,$$

kde jsme v poslední rovnosti využili symetrie matice **A**, $A_{ij} = A_{ji}$.

V našem případě je $A_{11} = 2$, $A_{22} = 4$ a $A_{12} = A_{21} = -1$. Po dosazení do obecného předpisu proto máme

$$\underline{\underline{F(z_1, z_2) = 2z_1^{\ 2} + 4z_2^{\ 2} - 2z_1z_2}} .$$

Pokud bychom dali přednost označení proměnných symboly *x* a *y*, psali bychom

$$F(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 2xy .$$

PŘÍKLAD 2

Nalezněte funkční předpis kvadratické formy $F(z_1, z_2, z_3)$ zadané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Postup je stejný jako v příkladu 1, pouze obecný vzorec bude poněkud delší. Obecně má součet na pravé straně vztahu definující kvadratickou formu *n* proměnných celkem n^2 členů (vzhledem k symetrii matice **A** je možno počet sčítanců nakonec snížit na $n(n+1)/2$), pro formy tří proměnných tedy máme co do činění se součty o devíti (šesti) sčítancích:

$$F(z_1, z_2, z_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{ij} z_i z_j =$$

$$= A_{11}z_1z_1 + A_{12}z_1z_2 + A_{13}z_1z_3 + A_{21}z_2z_1 + A_{22}z_2z_2 + A_{23}z_2z_3 + A_{31}z_3z_1 + A_{32}z_3z_2 + A_{33}z_3z_3 =$$

$$= A_{11}z_1^{\ 2} + A_{22}z_2^{\ 2} + A_{33}z_3^{\ 2} + 2A_{12}z_1z_2 + 2A_{13}z_1z_3 + 2A_{23}z_2z_3 .$$

V našem případě, kdy je $A_{11} = -2$, $A_{22} = 3$, $A_{33} = -1$, $A_{12} = A_{21} = 0$, $A_{13} = A_{31} = 1$ a $A_{23} = A_{32} = 1$, tedy platí

$$\underline{\underline{F(z_1, z_2, z_3) = -2z_1^{\ 2} + 3z_2^{\ 2} - z_3^{\ 2} + 2z_1z_3 + 2z_2z_3}} ,$$

nebo též

$$F(x,y,z) = -2x^2 + 3y^2 - z^2 + 2xz + 2yz\ .$$

PŘÍKLAD 3

Určete (symetrickou) matici **A** kvadratické formy

$$F(z_1,z_2,z_3) = z_2^{\ 2} - z_3^{\ 2} + 6z_1z_3\ .$$

Řešení

Podle vzorců uvedených v příkladech 1 a 2 můžeme zajisté bez potíží formulovat návod, jak matici **A** konstruovat ve zcela obecném případě:

- prvky na diagonále matice **A** odpovídají číselným koeficientům stojícím ve vyjádření formy u druhých mocnin nezávislých proměnných, přesněji A_{ii} je rovno koeficientu u z_i^2,
- mimodiagonální prvky A_{ij} jsou rovny vždy polovině koeficientů stojících u smíšených součinů z_iz_j.

Pro kvadratickou formu ze zadání tohoto příkladu proto platí

- $A_{11} = 0$, protože se $z_1^{\ 2}$ v zadání F vůbec nevyskytuje (neboli koeficient u něj stojící je nulový),
- $A_{22} = 1$, protože koeficient u $z_2^{\ 2}$ je roven 1,
- $A_{33} = -1$, protože koeficient u $z_2^{\ 2}$ je roven -1,
- $A_{12} = A_{21} = A_{23} = A_{32} = 0$, protože se smíšené součiny z_1z_2 a z_2z_3 v sumě zadávající F nevyskytují,
- $A_{13} = A_{31} = 3$ (polovina koeficientu stojícího u smíšeného součinu z_1z_3).

Vše tedy můžeme shrnout do přehledného tvaru

$$\underline{\underline{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1-3

1. Nalezněte funkční tvary kvadratických forem zadaných těmito maticemi.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Nalezněte matice zadaných kvadratických forem.

a) $F(z_1,z_2) = -z_1^{\ 2} - 3z_1z_2 + \sqrt{2}z_2^{\ 2}$, b) $F(x,y) = 3x^2 + xy - y^2$,

c) $F(z_1,z_2,z_3) = 2z_1z_2 + 2z_2z_3$, d) $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + 4xz - yz$.

PŘÍKLAD 4

Nalezněte vlastní čísla matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení

Vlastní čísla λ matice **A** hledáme jako řešení rovnice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 ,$$

kde **I** je jednotková matice[1] a symbolem „det“ označujeme determinant vepsané matice[2]. V našem případě máme tedy řešit rovnici

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0 .$$

Determinant matice 2 x 2 počítáme obvyklým způsobem[3]

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - (-1)(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 7 .$$

Problém nalezení vlastních čísel přechází takto na úlohu řešit kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0 ,$$

pro jejíž kořeny platí

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 7\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = 3 \pm \sqrt{2} .$$

Vlastní čísla matice A tedy jsou

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}}} \text{ a } \underline{\underline{\lambda_2 = 3 - \sqrt{2}}} .$$

PŘÍKLAD 5

Nalezněte vlastní čísla matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení

Výpočet je obdobný jako v předcházejícím příkladu: vlastní čísla hledáme pomocí rovnice

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 ,$$

přičemž determinant počítáme tentokrát podle Sarrusova pravidla[3]

---

[1] viz *Breviář*, Apendix 4, část A4.2, oddíl *Speciální matice*
[2] viz *Breviář*, Apendix 4, část A4.3 *Determinanty*
[3] viz *Breviář*, Apendix 4, část A4.3 *Determinanty*, věta o výpočtu determinantů

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot(-\lambda) + 1\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot(-\lambda)\cdot 0 - (-\lambda)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot(-\lambda) =$$

$-\lambda^3 + 2\lambda$.

Vlastní čísla musí tedy splňovat rovnici

$$-\lambda^3 + 2\lambda = 0\,,$$

která má následující řešení

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 0}}\,,\ \underline{\underline{\lambda_2 = \sqrt{2}}}\ \text{a}\ \underline{\underline{\lambda_3 = -\sqrt{2}}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 4 A 5

1. Nalezněte vlastní čísla zadaných symetrických matic.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

PŘÍKLAD 6

Vyšetřete definitnost kvadratické formy $F(z_1, z_2, z_3) = 2z_1z_2 + 2z_2z_3$.

Řešení

O definitnosti kvadratické formy rozhodujeme např. na základě znalosti znamének vlastních čísel jí odpovídající symetrické matice.[4] Postup při vyšetřování definitnosti zadané formy můžeme shrnout do následujících bodů

1. *nalezneme příslušnou symetrickou matici,*
2. *určíme její vlastní čísla,*
3. *podle jejich znamének rozhodneme.*

Ad 1. Nalézt pro zadanou kvadratickou formu jí odpovídající symetrickou matici jsme se naučili v příkladu 3. Postupem tam uvedeným zjistíme, že v našem případě platí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ad 2. Vlastní čísla této matice jsme již ale určili v příkladu 5, můžeme tedy psát

$$\lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = \sqrt{2}\ \text{a}\ \lambda_3 = -\sqrt{2}\,.$$

Ad 3. Protože jedno z vlastních čísel je kladné a jedno záporné, je nutně zadaná kvadratická forma <u>indefinitní</u>.

[4] [4] viz *Breviář*, kap. 2, část 2.5, oddíl *Kvadratické formy*

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 6

1. Zjistěte, zda je uvedená kvadratická forma pozitivně definitní, negativně definitní, indefinitní, nebo nepatří ani do jedné z uvedených kategorií.

a) $F(z_1,z_2)=z_1^{\,2}-2z_1z_2+2z_2^{\,2}$,

b) $F(x,y)=-xy$,

c) $F(z_1,z_2,z_3)=z_1^{\,2}-2z_1z_3+z_2^{\,2}$,

d) $F(x,y,z)=x^2+y^2+4xz-2yz$.

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1-3

1a) $F(z_1,z_2)=2z_1^2+2z_1z_2+2z_2^2$,

1b) $F(z_1,z_2)=3z_1^2-8z_1z_2$,

1c) $F(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2+3z_3^2+4z_1z_2$,

1d) $F(z_1,z_2,z_3)=2z_1z_2-2z_2z_3$.

2a) $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$,

2b) $\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$,

2c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

2d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 4 A 5

1a) $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3$;

1b) $\lambda_1=\dfrac{3+\sqrt{73}}{2},\ \lambda_2=\dfrac{3-\sqrt{73}}{2}$

1c) $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=3$;

1d) $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\sqrt{2},\ \lambda_3=-\sqrt{2}$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 6

1a) Pozitivně definitní, $\left(\lambda_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\doteq 2{,}6180;\ \lambda_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\doteq 0{,}3819\right)$,

1b) indefinitní, $\left(\lambda_1=\dfrac{1}{2},\ \lambda_2=-\dfrac{1}{2}\right)$,

1c) indefinitní, $\left(\lambda_1=1,\ \lambda_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2},\lambda_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$,

1d) indefinitní, $\left(\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\doteq 2{,}791;\ \lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\doteq -1{,}791,\ \lambda_3=1\right)$.