TAYLORŮV ROZVOJ

PŘÍKLAD 1

Nalezněte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y) = x^3 + y^3$ na okolí bodu $\vec{a} = (1,1)$.

Řešení

Podle obecného vzorce z *Breviáře* je Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)$ dán na okolí bodu $\vec{a} = (a_x, a_y)$ předpisem

$$T_2(x,y;f,\vec{a}) = f(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})\cdot(x-a_x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\cdot(y-a_y) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a})\cdot(x-a_x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{a})\cdot(x-a_x)(y-a_y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a})\cdot(y-a_y)^2\right],$$

kde jsme v hranaté závorce na pravé straně sloučili vzhledem k rovnosti smíšených druhých derivací členy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{a})\cdot(x-a_x)(y-a_y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\vec{a})\cdot(y-a_y)(x-a_x)$$

Nejdříve tedy musíme určit funkční hodnotu zadané funkce a její první a druhé parciální derivace v bodě $\vec{a}$,

- $f(\vec{a}) = f(1,1) = 1^3 + 1^3 = 2$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3) = 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3\cdot 1^2 = 3$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^3) = 3y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3\cdot 1^2 = 3$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6\cdot 1 = 6$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2) = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 6\cdot 1 = 6$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) = 0$,

a ty následně dosadit do vzorce pro T_2

$$T_2(x,y;f,\vec{a}) = 2 + 3\cdot(x-1) + 3\cdot(y-1) + \tfrac{1}{2!}\left[6\cdot(x-1)^2 + 2\cdot 0\cdot(x-1)(y-1) + 6\cdot(y-1)^2\right] =$$
$$= \underline{\underline{2 + 3(x-1) + 3(y-1) + 3(x-1)^2 + 3(y-1)^2}}\,.$$

Možné, i když ne vždy užitečné, jsou dále úpravy spočívající v umocnění a roznásobení závorek. Ty přenecháváme čtenáři jako jednoduché samostatné cvičení.

PŘÍKLAD 2

Nalezněte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y,z)=xyz$ na okolí bodu $\vec{a}=(1,1,1)$.

Řešení

Postup výpočtu je stejný jako v příkladu 1, pouze obecný vzorec pro hledaný Taylorův polynom bude složitější,

$$T_2(x,y,z;f,\vec{a})=f(\vec{a})+\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})\cdot(x-a_x)+\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\cdot(y-a_y)+\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a})\cdot(z-a_z)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a})\cdot(x-a_x)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a})\cdot(y-a_y)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{a})\cdot(z-a_z)^2+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{a})\cdot(x-a_x)(y-a_y)+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\vec{a})\cdot(x-a_x)(z-a_z)+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\vec{a})\cdot(y-a_y)(z-a_z)\right],$$

a budeme muset vypočítat i více parciálních derivací.

- $f(\vec{a})=f(1,1,1)=1\cdot1\cdot1=1$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(xyz)=yz$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=1\cdot1=1$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(xyz)=xz$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})=\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=1\cdot1=1$,
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}(xyz)=xy$, $\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a})=\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=1\cdot1=1$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(yz)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a})=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1)=0$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(xz)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a})=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1)=0$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}(xy)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{a})=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1)=0$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(yz)=z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{a})=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1,1)=1$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}(yz)=y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\vec{a})=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(1,1,1)=1$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}(xz)=x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\vec{a})=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(1,1,1)=1$.

I po dosazení do vzorce pro T_2 dostaneme tentokrát poněkud složitější výraz

$$T_2(x,y,z;f,\vec{a})=1+1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)+\tfrac{1}{2!}\left[0\cdot(x-1)^2+0\cdot(y-1)^2+0\cdot(z-1)^2+\right.$$
$$\left.+2\cdot1\cdot(x-1)(y-1)+2\cdot1\cdot(x-1)(z-1)+2\cdot1\cdot(y-1)(z-1)\right]=$$
$$=\underline{\underline{1+(x-1)+(y-1)+(z-1)+(x-1)(y-1)+(x-1)(z-1)+(y-1)(z-1)}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2

1. Nalezněte Taylorův polynom druhého stupně zadané funkce na okolí zadaného bodu.

a) $f(x,y)=\cos(x-y)$, $\vec{a}=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$, b) $f(x,y,z)=\sqrt{x+y+z}$, $\vec{a}=(1,1,1)$.

PŘÍKLAD 3

Pomocí Taylorova rozvoje druhého stupně určete přibližně $3{,}05^{\,0{,}99}$.

Řešení

Řešením tohoto příkladu zpřesníme výsledek, který jsme získali v předcházející kapitole (*Totální diferenciál*, příklad 2). Podobně jako tam budeme pracovat s funkcí $f(x,y)=x^y$, kterou rozvineme tentokrát na blízkém okolí bodu $\vec{a}=(3,1)$ do Taylorova polynomu zadaného stupně. Pak můžeme psát (viz příklad 1)

$$f(x,y)\approx T_2(x,y;f,\vec{a})\equiv f(\vec{a})+\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})\cdot(x-a_x)+\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\cdot(y-a_y)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a})\cdot(x-a_x)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{a})\cdot(x-a_x)(y-a_y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a})\cdot(y-a_y)^2\right].$$

Nejdříve tedy musíme určit funkční hodnotu zadané funkce a potřebné parciální derivace

- $f(3,1)=3^1=3$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}x^y=yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)=1\cdot 3^{1-1}=1$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}x^y=x^y\ln x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)=3^1\cdot\ln 3=3\cdot\ln 3\doteq 1{,}0986\cdot 3=3{,}2958$, [1]
- $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(yx^{y-1})=y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(3,1)=1\cdot(1-1)\cdot 3^{1-2}=0$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(x^y\ln x)=x^y\ln^2 x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,1)=3^1\cdot\ln^2 3=3\cdot\ln^2 3\doteq 1{,}2069\cdot 3=3{,}6207$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1})=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(3,1)=3^{1-1}+1\cdot 3^{1-1}\ln 3=1+\ln 3\doteq$
  $\doteq 2{,}0986$.

Po dosazení pak máme

$$x^y\approx 3+1\cdot(x-3)+3{,}2958\cdot(y-1)+\tfrac{1}{2}\left[0\cdot(x-3)^2+2\cdot 2{,}0986\cdot(x-3)(y-1)+3{,}6207\cdot(y-1)^2\right]$$

a dále též

$$3{,}05^{0{,}99}\approx 3+(3{,}05-3)+3{,}2958\cdot(0{,}99-1)+\tfrac{1}{2}\left[2\cdot 2{,}0986\cdot(3{,}05-3)(0{,}99-1)+3{,}6207\cdot(0{,}99-1)^2\right]\doteq$$
$$\doteq 3{,}0162\,.$$ [2]

[1] I nyní jsme hodnotu ln 3 vypočítali pomocí kalkulačky. Její přibližný výpočet např. pomocí Taylorova rozvoje druhého řádu funkce ln *x* na okolí bodu *e* je jen technickou záležitostí a čtenář si ji v rámci opakování látky z diferenciálního počtu jedné reálné proměnné jistě provede snadno samostatně.

[2] Zajímavé je jistě porovnání získaného výsledku s hodnotou, kterou s přesností na čtyři desetinná místa dá kalkulačka (3,0162), a s hodnotou, ke které jsme dospěli pomocí věty o totálním diferenciálu (3,0170).

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 3

1. Pomocí Taylorova rozvoje druhého stupně určete přibližně:

a) $\sqrt{3{,}01^2+4{,}05^2}$; [3]

b) změnu objemu rotačního elipsoidu o poloosách $a = 1$ m a $b = 0{,}5$ m, jestliže se první i druhá poloosa zvětší o 2 μm ($V=\frac{4}{3}\pi ab^2$); [4]

c) změnu objemu elipsoidu o poloosách $a = 1$ m, $b = 2$ m a $c = 3$ m, jestliže se první, druhá i třetí poloosa zmenší o 3 mm ($V=\frac{4}{3}\pi abc$).

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2

1a) $$T_2(x,y,f,\vec{a})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(y-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(y-\frac{\pi}{6}\right)^2,$$

1b) $$\begin{aligned}T_2(x,y,z,f,\vec{a})&=\sqrt{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}(x-1)+\frac{1}{2\sqrt{3}}(y-1)+\frac{1}{2\sqrt{3}}(z-1)-\\&-\frac{1}{24\sqrt{3}}(x-1)^2-\frac{1}{24\sqrt{3}}(y-1)^2-\frac{1}{24\sqrt{3}}(z-1)^2-\\&-\frac{1}{12\sqrt{3}}(x-1)(y-1)-\frac{1}{12\sqrt{3}}(y-1)(z-1)-\frac{1}{12\sqrt{3}}(x-1)(z-1).\end{aligned}$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 3

	Taylorův polynom 2. stupně,	totální diferenciál,	„přesná“ hodnota.[5]
1a)	$5{,}0460484$,	$5{,}046$,	$5{,}046047959$;
1b)	$1{,}047198618\cdot10^{-5}\ \text{m}^3$,	$1{,}047197551\cdot10^{-5}\ \text{m}^3$,	$1{,}047199227\cdot10^{-5}\ \text{m}^3$;
1c)	$-0{,}138003882\ \text{m}^3$,	$-0{,}1382300768\ \text{m}^3$,	$-0{,}138003995\ \text{m}^3$.

[3] Porovnejte s výsledkem získaným pomocí věty o totálním diferenciálu i s „přesnou“ hodnotou určenou pomocí kalkulačky.
[4] Porovnejte s výsledkem získaným v předcházející kapitole pomocí věty o totálním diferenciálu.
[5] Záleží na tom, jak přesně (na kolik desetinných míst) vaše kalkulačka počítá.