SLOŽENÉ FUNKCE

PŘÍKLAD 1

Určete derivaci funkce $h(t)=f(g_1(t),g_2(t))$, kde $f(x,y)=e^{x/y}$, $g_1(t)=2t+3$, $g_2(t)=2t-3$.

Řešení

Podle pravidla o derivování složených funkcí více proměnných stejného typu jako je funkce ze zadání tohoto příkladu (první pravidlo z *Breviáře*) můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(t),g_2(t)\big)\cdot\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(t),g_2(t)\big)\cdot\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t}(t).$$

Musíme tedy nejdříve spočítat obě parciální derivace vnější funkce f (a po provedení derivování nahradit nezávislé proměnné vnější funkce funkcemi vnitřními ($x\to g_1(t)$, $y\to g_2(t)$), derivace obou vnitřních funkcí a nakonec dosadit do výše uvedeného vzorce:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial e^{x/y}}{\partial x}=e^{x/y}\cdot\frac{1}{y}$, čili $\frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(t),g_2(t)\big)\equiv\frac{\partial f}{\partial x}\big(2t+3,2t-3\big)=e^{\frac{2t+3}{2t-3}}\cdot\frac{1}{2t-3}$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial e^{x/y}}{\partial y}=e^{x/y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$, čili $\frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(t),g_2(t)\big)\equiv\frac{\partial f}{\partial y}\big(2t+3,2t-3\big)=-e^{\frac{2t+3}{2t-3}}\cdot\frac{2t+3}{(2t-3)^2}$;
- $\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}(2t+3)}{\mathrm{d}t}=2$,
- $\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}(2t-3)}{\mathrm{d}t}=2$,

a tedy nakonec

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)=e^{\frac{2t+3}{2t-3}}\cdot\frac{1}{2t-3}\cdot 2-e^{\frac{2t+3}{2t-3}}\cdot\frac{2t+3}{(2t-3)^2}\cdot 2=\frac{2}{2t-3}e^{\frac{2t+3}{2t-3}}\left(1-\frac{2t+3}{2t-3}\right)=\frac{2}{2t-3}e^{\frac{2t+3}{2t-3}}\,\frac{2t-3-(2t+3)}{2t-3}=\underline{\underline{-\frac{12}{(2t-3)^2}e^{\frac{2t+3}{2t-3}}}}.$$

Výpočet bychom mohli provést i tak, že bychom nejprve určili složenou funkci h, $h(t)=e^{\frac{2t+3}{2t-3}}$, a tu pak derivovali jako složenou funkci jedné reálné proměnné

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\frac{2t+3}{2t-3}}=e^{\frac{2t+3}{2t-3}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2t+3}{2t-3}=e^{\frac{2t+3}{2t-3}}\,\frac{2(2t-3)-2(2t+3)}{(2t-3)^2}=\underline{\underline{-\frac{12}{(2t-3)^2}e^{\frac{2t+3}{2t-3}}}}.$$

Výsledek je pochopitelně stejný, dokonce se na první pohled zdá, že celý výpočet je mnohem jednodušší než ten, který jsme si uvedli výše. V tomto bodě je ale nutno vyslovit varování. Druhý způsob výpočtu je jednodušší právě jen v tak jednoduchých příkladech, jakým je náš problém. Pokud bychom měli za úkol derivovat komplikovanější složenou funkci, první způsob, založený na využití pravidla o derivování složené funkce více reálných proměnných, je mnohem přehlednější, a vede proto k menší pravděpodobnosti, že se během výpočtu dopustíme závažných chyb. A pokud už nějakou chybu uděláme, snadněji ji v dobře strukturovaném zápisu dohledáme.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1. Určete derivaci složené funkce $h(t)$. K výpočtu použijte oba postupy z příkladu 1 a výsledky porovnejte.

a) $f(x,y)=x^2-xy+y^2$, $g_1(t)=5t-1$, $g_2(t)=3-t$;

b) $f(x,y) = x\ln y$, $g_1(t) = t^2 - 1$, $g_2(t) = t^2 + 1$;

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$, $g_1(t) = \sin t$, $g_2(t) = \cos t$, $g_3(t) = \mathrm{tg}\, t$;

d) $f(x,y,z) = z^{x-y}$, $g_1(t) = t$, $g_2(t) = t^2$, $g_3(t) = t^3$.

PŘÍKLAD 2

Určete parciální derivace funkce $h(x,y) = f(g(x,y))$, kde $f(u) = \sin u$ a $g(x,y) = x^2 + y^2$.

Řešení

Podle druhého pravidla o derivování složených funkcí více reálných proměnných platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\big(g(x,y)\big)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\big(g(x,y)\big)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

Struktura výpočtu je obdobná té, kterou jsme předvedli v předcházejícím příkladu

- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(u) = \frac{\mathrm{d}\sin u}{\mathrm{d}u} = \cos u$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\big(g(x,y)\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\left(x^2+y^2\right) = \cos\left(x^2+y^2\right)$,
- $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right) = 2x$,
- $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right) = 2y$.

Po dosazení do obecných vzorců dostáváme

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)\cdot 2x = \underline{\underline{2x\cdot\cos\left(x^2+y^2\right)}},$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)\cdot 2y = \underline{\underline{2y\cdot\cos\left(x^2+y^2\right)}}.$$

I při výpočtu derivací ze zadání tohoto příkladu bychom mohli postupovat tak, že bychom nejdříve zapsali složenou funkci, $h(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, a tu pak derivovali. Pro parciální derivaci podle první proměnné bychom takto např. získali [1]

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \sin(x^2+y^2)}{\partial x} = \left.\frac{\mathrm{d}\sin u}{\mathrm{d}u}\right|_{u=x^2+y^2}\cdot\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = \cos(x^2+y^2)\cdot 2x = \underline{\underline{2x\cdot\cos(x^2+y^2)}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 2

1. Určete parciální derivace složené funkce *h*(*x*,*y*) resp. *h*(*x*,*y*,*z*). K výpočtu použijte oba postupy z příkladu 2 a výsledky porovnejte.

a) $f(u) = e^{-u}$, $g(x,y) = x^n + y^n$;

b) $f(u) = \cos u$, $g(x,y) = 3x + 4y$;

c) $f(u) = \mathrm{arctg}\, u$, $g(x,y,z) = xyz$;

d) $f(u) = \sqrt{u}$, $g(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$.

[1] Při derivování podle x pohlížíme na y jako na konstantu a využijeme větu o derivování složené funkce jedné reálné proměnné.

PŘÍKLAD 3

Určete parciální derivace funkce $h(u,v) = f(g_1(u,v), g_2(u,v))$, kde $f(x,y) = x^y$, $g_1(u,v) = u+v$ a $g_2(u,v) = u-v$.

Řešení

Pravidlo o derivování složených funkcí více reálných proměnných nabývá v tomto (nejobecnějším) příkladu tvaru

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(u,v), g_2(u,v)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(u,v), g_2(u,v)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v),$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(u,v), g_2(u,v)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(u,v), g_2(u,v)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v).$$

Pro jeho použití musíme tedy znát následující parciální derivace

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial x^y}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(g_1(u,v), g_2(u,v)) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(u+v, u-v) = (u-v)\cdot(u+v)^{u-v-1}$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial x^y}{\partial y} = x^y \ln x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(g_1(u,v), g_2(u,v)) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(u+v, u-v) = (u+v)^{u-v}\cdot \ln(u+v)$,
- $\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial u} = 1$,
- $\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial v} = 1$,
- $\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial(u-v)}{\partial u} = 1$,
- $\frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial(u-v)}{\partial v} = -1$.

Po dosazení pak máme

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = (u-v)\cdot(u+v)^{u-v-1}\cdot 1 + (u+v)^{u-v}\cdot\ln(u+v)\cdot 1 = \underline{\underline{(u+v)^{u-v}\left[\tfrac{u-v}{u+v} + \ln(u+v)\right]}},$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = (u-v)\cdot(u+v)^{u-v-1}\cdot 1 + (u+v)^{u-v}\cdot\ln(u+v)\cdot(-1\} = \underline{\underline{(u+v)^{u-v}\left[\tfrac{u-v}{u+v} - \ln(u+v)\right]}}.$$

Dokázali byste i v tomto případě provést výpočet druhým způsobem, tj. nejdříve vytvořit složenou funkci a pak ji derivovat? Vyzkoušejte samostatně.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 3

1. Určete parciální derivace složené funkce *h*(*x*,*y*). K výpočtu použijte oba postupy z příkladu 2 a výsledky porovnejte.

a) $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$, $g_1(u,w) = 2u + 3w$, $g_2(u,w) = u - 2w$;

b) $f(x,y) = xy$, $g_1(u,w) = u\,\mathrm{tg}\,w$, $g_2(u,w) = w\,\mathrm{tg}\,u$;

c) $f(x,y) = \ln x - \ln y$, $g_1(u,w) = e^u + e^w$, $g_2(u,w) = e^u - e^w$;

DALŠÍ CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1-3

1. Pomocí vhodného pravidla pro derivování složené funkce určete naznačené parciální derivace.

a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}$, b) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x+y\right)^{20}$, c) $\dfrac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$,

d) $\dfrac{\partial}{\partial y}\ln\left(x+\ln y\right)$, e) $\dfrac{\partial}{\partial z}\cos(x+y^2+z^3)$, f) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{x^2+y^3}$.

●●2. Upravte následující výrazy.

a) $2\dfrac{\partial}{\partial y}f(2x+y)-\dfrac{\partial}{\partial x}f(2x+y)$, b) $a\dfrac{\partial}{\partial y}f(ax+by)-b\dfrac{\partial}{\partial x}f(ax+by)$,

c) $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}u(x+y)-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x+y)$, d) $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x-ct)-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x-ct)$.

Výsledky:

Cvičení k příkladu 1

1a) $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)=62t-32$,

1b) $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)=2t\left(\ln\left(t^2+1\right)+\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)$,

1c) $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)=2\sin t\cos t-3\cos^2 t\sin t+4\dfrac{\operatorname{tg}^3 t}{\cos^2 t}$,

1d) $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)=t^{3t-3t^2}\left[\left(3-6t\right)\ln t+3-3t\right]$.

Cvičení k příkladu 2

1a)
$$\frac{\partial h}{\partial x}\left(x,y\right)=-e^{-x^n-y^n}nx^{n-1},$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}\left(x,y\right)=-e^{-x^n-y^{-n}}ny^{n-1},$$

1b)
$$\frac{\partial h}{\partial x}\left(x,y\right)=-3\sin\left(3x+4y\right),$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}\left(x,y\right)=-4\sin\left(3x+4y\right),$$

1c)
$$\frac{\partial h}{\partial x}\left(x,y,z\right)=\frac{yz}{1+x^2y^2z^2},$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}\left(x,y,z\right)=\frac{xz}{1+x^2y^2z^2},$$
$$\frac{\partial h}{\partial z}\left(x,y,z\right)=\frac{xy}{1+x^2y^2z^2},$$

1d)
$$\frac{\partial h}{\partial x}\left(x,y,z\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}},$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}\left(x,y,z\right)=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3+z^4}},$$
$$\frac{\partial h}{\partial z}\left(x,y,z\right)=\frac{2z^3}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}}.$$

Cvičení k příkladu 3

1a) $\frac{\partial h}{\partial u}(u,w) = -2u + 11w$, $\frac{\partial h}{\partial w}(u,w) = 11u + 62w$;

1b) $\frac{\partial h}{\partial u}(u,w) = w\mathrm{tg}w\left(\frac{u}{\cos^2 u} + \mathrm{tg}u\right)$, $\frac{\partial h}{\partial w}(u,w) = u\mathrm{tg}u\left(\frac{w}{\cos^2 w} + \mathrm{tg}w\right)$;

1c) $\frac{\partial h}{\partial u}(u,w) = e^u\left(\frac{1}{e^u + e^w} - \frac{1}{e^u - e^w}\right)$, $\frac{\partial h}{\partial w}(u,w) = e^w\left(\frac{1}{e^u + e^w} + \frac{1}{e^u - e^w}\right)$.

Další cvičení k příkladům 1-3

1a) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 1b) $20(x+y)^{19}$, 1c) $\frac{y}{x^2 + y^2}$,

1d) $\frac{1}{y(x + \ln y)}$, 1e) $-3z^2 \sin\left(x + y^2 + z^3\right)$, 1f) $\frac{-2x}{\left(x^2 + y^3\right)^2}$.

2a) 0, 2b) 0, 2c) 0, 2d) 0.