Substituce v trojných integrálech

Pomocí přechodu do válcových souřadnic vypočítejte integrál:

a) $\iiint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, kde $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le 4\ \wedge\ 0\le z\le 2\}$.

b) $\iiint\limits_M 1\,dxdydz$, kde $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ R_1^2\le x^2+y^2\le R_2^2\ \wedge\ 0\le z\le h\}$, kde R_1, R_2 a h jsou kladné konstanty, $R_1<R_2$.

c) $\iiint\limits_M (x^2+y^2)^{-2}\,dxdydz$, kde $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ R^2\le x^2+y^2<+\infty\ \wedge\ z\in\langle 0,h\rangle\}$, kde R a h jsou kladné konstanty.

Návody:

a) Substitucí $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ a $z=Z$ převeďte integrál $\iiint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ na integrál $\iiint\limits_N r^2\,drd\varphi dZ$, kde $N=\{[r,\varphi,Z]\in\mathbb{R}^3:\ r\in\langle 0,2\rangle\ \wedge\ \varphi\in\langle 0,2\pi)\ \wedge\ Z\in\langle 0,2\rangle\}$.

b) Substitucí $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ a $z=Z$ převeďte integrál $\iiint\limits_M 1\,dxdydz$ na integrál $\iiint\limits_N r\,drd\varphi dZ$, kde $N=\{[r,\varphi,Z]\in\mathbb{R}^3:\ r\in\langle R_1,R_2\rangle\ \wedge\ \varphi\in\langle 0,2\pi)\ \wedge\ Z\in\langle 0,h\rangle\}$.

c) Substitucí $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ a $z=Z$ převeďte integrál $\iiint\limits_M (x^2+y^2)^{-2}\,dxdydz$ na integrál $\iiint\limits_N r^{-3}\,drd\varphi dZ$, kde $N=\{[r,\varphi,Z]\in\mathbb{R}^3:\ r\in\langle R,+\infty)\ \wedge\ \varphi\in\langle 0,2\pi)\ \wedge\ Z\in\langle 0,h\rangle\}$.

Výsledky:

a) $[32\pi/3]$; b) $\left[\pi\left(R_2^{\,2}-R_1^{\,2}\right)h\right]$; c) $\left[\pi h/R^2\right]$.

Pomocí přechodu do sférických souřadnic vypočítejte integrál:

a) $\iiint\limits_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, kde $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 4\}$;

b) $\iiint\limits_M 1\,dxdydz$, kde $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ R_1^2\le x^2+y^2+z^2\le R_2^2\}$, kde R_1 a R_2 jsou kladné konstanty, $R_1<R_2$;

c) $\iiint\limits_M (x^2+y^2+z^2)^{-2}\,dxdydz$, kde $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ R^2\le x^2+y^2+z^2<+\infty\}$, kde R je kladná konstanta.

Návody:

a) Substitucí $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$ a $z=r\cos\theta$ převeďte integrál $\iiint\limits_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ na integrál $\iiint\limits_N r^3\sin\theta\,drd\varphi d\theta$, kde $N=\{[r,\varphi,\theta]\in\mathbf{R}^3: r\in\langle 0;2\rangle\wedge\varphi\in\langle 0;2\pi\rangle\wedge\theta\in\langle 0;\pi\rangle\}$.

b) Substitucí $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$ a $z=r\cos\theta$ převeďte integrál $\iiint\limits_M 1\,dxdydz$ na integrál $\iiint\limits_N r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta$, kde $N=\{[r,\varphi,\theta]\in\mathbb{R}^3:\ r\in\langle R_1,R_2\rangle\ \wedge\ \varphi\in\langle 0,2\pi)\ \wedge\ \theta\in\langle 0,\pi\rangle\}$.

c) Substitucí $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$ a $z=r\cos\theta$ převeďte integrál $\iiint\limits_M \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na integrál

$\iiint\limits_N r^{-2}\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$, kde $\mathrm{N}=\left\{[r,\varphi,\theta]\in\mathbb{R}^3:\ r\in\langle R,+\infty)\ \wedge\ \varphi\in\langle 0,2\pi)\ \wedge\ \theta\in\langle 0,\pi\rangle\right\}$.

Výsledky:

a) $[16\pi]$; b) $\left[\frac{4}{3}\pi\left(R_2^{\,3}-R_1^{\,3}\right)\right]$; c) $[4\pi/R]$.

Pomocí substituce $x=ar\cos\varphi\sin\theta$, $y=br\sin\varphi\sin\theta$ a $z=cr\cos\theta$ (*a*, *b* a *c* jsou kladné konstanty) vypočítejte integrál:

a) $\iiint\limits_M 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\le 1\right\}$;

b) $\iiint\limits_M xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\le 1\right\}$;

c) $\iiint\limits_M \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\le 1\right\}$;

Obdobně jako v úlohách a) - c) vypočítejte:

d) $\iiint\limits_M xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x;y;z]\in\mathbf{R}^3: x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}z^2\le 1\right\}$;

e) $\iiint\limits_M \sqrt{x^2+2y^2+3z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x;y;z]\in\mathbf{R}^3: \frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{2}z^2\le 1\right\}$;

Návody:

a) Pomocí výše uvedené substituce převeďte integrál $\iiint\limits_M 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na integrál $\iiint\limits_N \left(abcr^2\sin\theta\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$, kde $\mathrm{N}=\left\{[r,\varphi,\theta]\in\mathbb{R}^3:\ r\in\langle 0,1\rangle\ \wedge\ \varphi\in\langle 0,2\pi)\ \wedge\ \theta\in\langle 0,\pi\rangle\right\}$.

b) Pomocí výše uvedené substituce převeďte integrál $\iiint\limits_M xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na integrál $\iiint\limits_N a^2b^2c^2r^5\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$, kde $\mathrm{N}=\left\{[r;\varphi;\theta]\in\mathbf{R}^3: r\in\langle 0;1\rangle\wedge\varphi\in\langle 0;2\pi\rangle\wedge\theta\in\langle 0;\pi\rangle\right\}$.

c) Pomocí výše uvedené substituce převeďte integrál $\iiint\limits_M \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na integrál $\iiint\limits_N abcr^2\sqrt{1-r^2}\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$, kde $\mathrm{N}=\left\{[r;\varphi;\theta]\in\mathbf{R}^3: r\in\langle 0;1\rangle\wedge\varphi\in\langle 0;2\pi\rangle\wedge\theta\in\langle 0;\pi\rangle\right\}$.

d) Pomocí výše uvedené substituce převeďte integrál $\iiint\limits_M xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na integrál $\iiint\limits_N 6r^5\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$, kde $\mathrm{N}=\left\{[r;\varphi;\theta]\in\mathbf{R}^3: r\in\langle 0;1\rangle\wedge\varphi\in\langle 0;2\pi\rangle\wedge\theta\in\langle 0;\pi\rangle\right\}$.

e) Pomocí výše uvedené substituce převeďte integrál $\iiint\limits_M \sqrt{x^2+2y^2+3z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na integrál $6\sqrt{6}\iiint\limits_N r^3\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$, kde $\mathrm{N}=\left\{[r;\varphi;\theta]\in\mathbf{R}^3: r\in\langle 0;1\rangle\wedge\varphi\in\langle 0;2\pi\rangle\wedge\theta\in\langle 0;\pi\rangle\right\}$.

Výsledky:

a) $\left[\frac{4}{3}\pi abc\right]$; b) $[0]$; c) $\left[\frac{1}{4}\pi^2 abc\right]$; d) $[0]$; e) $\left[6\sqrt{6}\pi\right]$.

Trojný integrál $\iiint\limits_{M} 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ udává objem množiny M. Pomocí trojného integrálu určete objemy následujících těles:

a) válec o poloměru R a výšce h;
b) válcová vrstva o vnitřním poloměru podstavy R_1, vnějším poloměru R_2 ($R_2 > R_1$) a výšce h;
c) koule o poloměru R;
d) kulové vrstvy o vnitřním poloměru R_1 a vnějším poloměru R_2 ($R_2 > R_1$);
e) elipsoidu o poloosách a, b a c;.

K jakým výsledkům dospějete, pokusíte-li se vypočíst pomocí trojného integrálu objem:

f) kruhu (válec o nulové výšce);
g) elipsy;
h) obdélníka?

Výsledky:
a) $\left[\pi R^2 h\right]$; b) $\left[\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)h\right]$; c) $\left[\frac{4}{3}\pi R^3\right]$; d) $\left[\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)\right]$; e) $\left[\frac{4}{3}\pi abc\right]$; f - h) $[0]$.