

Trojné integrály na trojrozměrných intervalech

Vypočítejte uvedené trojné integrály:

- a) $\iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 2 \rangle \times \langle 0; 3 \rangle$;
- b) $\iiint_M (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$;
- c) $\iiint_M xyz \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 1; 2 \rangle \times \langle 2; 4 \rangle$;
- d) $\iiint_M xz \cos y \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$;
- e) $\iiint_M e^x \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$;
- f) $\iiint_M \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$;
- g) $\iiint_M [(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)]^{-\frac{1}{2}} \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle \times \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle \times \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$;
- h) $\iiint_M \sin(x+y)\sin(y+z) \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$;
- i) $\iiint_M \sqrt{x+y+z+1} \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 2 \rangle \times \langle 0; 3 \rangle$;

Návod: Trojné integrály převed'te na trojnásobné pomocí Fubiniovy věty: Pro $K = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle \times \langle e; f \rangle$ platí

$$\iiint_K f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f f(x; y; z) \, dz \right) dy \right] dx = \dots,$$

kde na pořadí jednonásobných integrací nezáleží.

Výsledky:

- a) $[6]$; b) $[3/2]$; c) $[9/2]$; d) $[\sqrt{2}/8]$; e) $[e-1]$; f) $[\pi^3/64]$; g) $[\pi^3/27]$; h) $[\pi]$;
- i) $\left[\frac{8}{105} (\sqrt{7^7} - \sqrt{6^7} - \sqrt{5^7} + \sqrt{3^7} + \sqrt{2^7} - 1) \right]$.
-

Vypočítejte trojné integrály:

- a) $\iiint_M A \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle a_1; a_2 \rangle \times \langle b_1; b_2 \rangle \times \langle c_1; c_2 \rangle$; $A, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ jsou zadané konstanty;
- b) $\iiint_M (ax + by + cz + d) \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0; \alpha \rangle \times \langle 0; \beta \rangle \times \langle 0; \gamma \rangle$; $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ jsou zadané konstanty;
- c) $\iiint_M x^n y^n z^n \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle -\Delta_x; \Delta_x \rangle \times \langle -\Delta_y; \Delta_y \rangle \times \langle -\Delta_z; \Delta_z \rangle$; n je liché přirozené číslo a $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ jsou zadané konstanty;

d) $\iiint_M \frac{1}{(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)(c^2 + z^2)} dx dy dz$, kde $M = \left\langle -\frac{a\pi}{4}, \frac{a\pi}{4} \right\rangle \times \left\langle -\frac{b\pi}{4}, \frac{b\pi}{4} \right\rangle \times \left\langle -\frac{c\pi}{4}, \frac{c\pi}{4} \right\rangle$; a, b, c jsou zadané kladné konstanty;

e) $\iiint_M \cos(k_x x + k_y y + k_z z + \varphi) dx dy dz$, kde $M = \left\langle 0, \frac{2\pi}{k_x} \right\rangle \times \left\langle 0, \frac{2\pi}{k_y} \right\rangle \times \left\langle 0, \frac{2\pi}{k_z} \right\rangle$, kde k_x, k_y, k_z jsou zadané nenulové konstanty.

Výsledky:

a) $[A(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1)]$; b) $\left[\frac{1}{2} \alpha \beta \gamma (a\alpha + b\beta + c\gamma + d) \right]$; c) $[0]$; d) $[8]$; e) $[0]$.
