Substituce ve dvojných integrálech

Pomocí přechodu do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ **vypočítejte následující dvojné integrály:**

a) $\iint\limits_{M} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x,\ y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\right\}$;

b) $\iint\limits_{M} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\right\}$;

c) $\iint\limits_{M} \dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$;

d) $\iint\limits_{M} |xy|\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x,\ y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 2 \wedge 0 \le y\right\}$;

e) $\iint\limits_{M} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x,\ y] \in \mathbb{R}^2 : R_1^2 \le x^2+y^2 \le R_2^2\right\}$, kde R_1, R_2 jsou kladné konstanty, $R_1 < R_2$;

f) $\iint\limits_{M} \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x,\ y] \in \mathbb{R}^2 : R^2 \le x^2+y^2 < +\infty\right\}$, kde R je kladná konstanta.

Návody:

a) $\iint\limits_{M} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{N} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, kde $N = \left\{[r,\ \varphi] \in \mathbb{R}^2 : r \in \langle 0,\ 2\rangle \wedge \varphi \in \langle 0,\ 2\pi\rangle\right\}$;

c) $\iint\limits_{M} \dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{N} \dfrac{1}{1+r} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, kde $N = \left\{[r,\varphi] \in \mathbb{R}^2 : r \in \langle 0;1\rangle \wedge \varphi \in \langle 0;\pi/2\rangle\right\}$;

e) $\iint\limits_{M} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{N} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, kde $N = \left\{[r,\ \varphi] \in \mathbb{R}^2 : r \in \langle R_1, R_2\rangle \wedge \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\right\}$;

f) $\iint\limits_{M} \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{N} \dfrac{1}{r^3}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, kde $N = \left\{[r,\ \varphi] \in \mathbb{R}^2 : r \in \langle R, +\infty\rangle \wedge \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\right\}$.

Výsledky:

a) $[16\pi/3]$; b) $[0]$; c) $[\pi(1-\ln 2)/2]$; d) $[3/2]$; e) $[\pi(R_2^2 - R_1^2)]$; f) $[\pi/R^2]$.

Pomocí substituce do eliptických souřadnic $ar\cos\varphi$ **,** $br\sin\varphi$ **(*a* a *b* jsou kladné konstanty) vypočítejte integrály:**

a) $\iint\limits_{M} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x,\ y] \in \mathbb{R}^2 : \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 \le 1\right\}$;

b) $\iint\limits_{M} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x,\ y] \in \mathbb{R}^2 : \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 \le 1\right\}$;

c) $\iint_{M} c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M=\left\{[x,\ y]\in\mathbb{R}^2:\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\le 1\right\}$ a c je kladná konstanta;

Obdobně jako v zadáních (a) - (c) vypočtěte:

d) $\iint_{M} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M=\left\{[x,\ y]\in\mathbb{R}^2:\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{1}\right)^2\le 1\right\}$;

e) $\iint_{M}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M=\left\{[x,\ y]\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\ge 1\right\}$.

Návody:

a) $\iint_{M} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{N} abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, kde $N=\left\{[r,\ \varphi]\in\mathbb{R}^2: r\in\langle 0,1\rangle\wedge\varphi\in\langle 0,2\pi\rangle\right\}$;

Výsledky:

a) $[\pi ab]$; b) $[0]$; c) $[2\pi c/3]$; d) $[2\pi]$; e) $\left[4\sqrt{2}\pi/3\right]$.

Dvojný integrál $\iint_{K} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ udává objem tělesa ležícího pod grafem funkce f na množině K. Pomocí dvojného integrálu určete objemy následujících těles [1]:

a) válce o poloměru R a výšce h;

b) kužele o poloměru podstavy R a výšce h;

c) koule o poloměru R;

d) rotačního elipsoidu o poloosách a a b;

e) elipsoidu o poloosách a, b a c;

Návody:

b) Ukažte nejdříve, že rovnice pláště kužele má tvar $f(x,\ y)=h-(h/R)\sqrt{x^2+y^2}$.

c) Vypočítejte nejdříve objem polokoule.

d) Rovnici elipsoidu uvažujte ve tvaru $(x/a)^2+(y/a)^2+(z/b)^2=1$. Pomocí dvojného integrálu určete nejdříve objem půlelipsoidu. Integraci proveďte v polárních souřadnicích.

e) Rovnici elipsoidu uvažujte ve tvaru $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1$. Pomocí dvojného integrálu určete nejdříve objem půlelipsoidu. Integraci proveďte v souřadnicích r a φ zadaných rovnicemi $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$.

Výsledky:

a) $[\pi r^2 h]$; b) $\left[\pi R^2 h/3\right]$; c) $\left[4\pi R^3/3\right]$; d) $\left[4\pi a^2 b/3\right]$; e) $[4\pi abc/3]$.

---

[1] Pokuste se o náčrtek těchto těles. Podle potřeby použijte substituce do polárních či eliptických souřadnic.