Dvojné integrály na obecnějších množinách

Vypočítejte dvojné integrály:

a) $\iint\limits_M x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x\in\langle 0,\ 1\rangle \wedge x^2\le y\le x\right\}$;

b) $\iint\limits_M y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x\in\langle -1,\ 1\rangle \wedge -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}\right\}$;

c) $\iint\limits_M x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y\in\left\langle 0,\ \frac{\pi}{2}\right\rangle \wedge 0\le x\le \cos y\right\}$;

d) $\iint\limits_M \left(4-y^2\right)^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y\in\langle 0,\ 2\rangle \wedge 0\le x\le y\right\}$;

e) $\iint\limits_M 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,\ y]\in\mathbb{R}^2 : x\in\langle 0,\ \pi/4\rangle \wedge 0\le y\le 1/\cos x\right\}$;

f) $\iint\limits_M \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,\ y]\in\mathbb{R}^2 : x\in\langle 0,\ 2\rangle \wedge 0\le y\le x\right\}$;

g) $\iint\limits_M \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,\ y]\in\mathbb{R}^2 : y\in\langle 0,\ 1\rangle \wedge 0\le x\le y^2\right\}$;

h) $\iint\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,\ y]\in\mathbb{R}^2 : x\in\langle -2,\ 2\rangle \wedge 0\le y\le 4-x^2\right\}$;

i) $\iint\limits_M \left(y^2+2xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,\ y]\in\mathbb{R}^2 : x\in\langle 0,\ 4\rangle \wedge \sqrt{x}\le y\le 2\right\}$;

Návody:

a) $\iint\limits_M x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^2}^{x} x^2 y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$; b) $\iint\limits_M y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$; c) $\iint\limits_M x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{\cos y} x\sin y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$;

d) $\iint\limits_M \left(4-y^2\right)^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^y \left(4-y^2\right)^{3/2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$; e) $\iint\limits_M 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\int\limits_0^{1/\cos x} 2y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$;

f) $\iint\limits_M \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^x \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$; g) $\iint\limits_M \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{y^2} \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$;

h) $\iint\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{-2}^{2}\left(\int\limits_0^{4-x^2} (x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$; i) $\iint\limits_M \left(y^2+2xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^4\left(\int\limits_{\sqrt{x}}^{2} \left(y^2+2xy\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

Výsledky:

a) [1/35]; b) [0]; c) [1/6]; d) [32/5]; e) [1]; f) [8/3]; g) $\left[2(2\sqrt{2}-1)/9\right]$; h) [256/15]; i) [256/15].

Dvojný integrál $\iint_M 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ udává plošnou míru (obsah) množiny M. Pomocí dvojných integrálů určete plošné obsahy následujících množin (rovinných útvarů) [1]:

a) $\mathrm{M} = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$;

b) $\mathrm{M} = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \pi/4 \le x \le 5\pi/4 \wedge \cos x \le y \le \sin x\right\}$;

c) $\mathrm{M} = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y^n \le x \le \sqrt[n]{y} \wedge 0 \le y \le 1,\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

d) obdélníku o stranách a a b;

e) kruhu o poloměru R;

f) elipsy o poloosách a a b;

g) trojúhelníku o vrcholech $A = [0, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [c_1, c_2]$, kde b, c_1 a c_2 jsou zadané konstanty, $b > 0$, $0 < c_1 < b$, $0 < c_2$.

Výsledky:
a) [1/3]; b) $\left[2\sqrt{2}\right]$; c) $\left[(n-1)/(n+1)\right]$; d) $[ab]$; e) $\left[\pi R^2\right]$; f) $[\pi ab]$; g) $[bc_2/2]$.

---

[1] Množiny znázorněte graficky.