

Dvojné integrály na dvojrozměrných intervalech

Vypočítejte dvojné integrály:

- a) $\iint_K (x^2 + 2y^2 - xy + 1) dx dy$, kde $K = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 2, 3 \rangle$;
b) $\iint_K y \sin x dx dy$, kde $K = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, \pi/2 \rangle$;
c) $\iint_K (xe^{x+y}) dx dy$, kde $K = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$;
d) $\iint_K x^2 y^2 dx dy$, kde $K = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$;
e) $\iint_K \frac{x}{y^2} dx dy$, kde $K = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 3, 4 \rangle$;
f) $\iint_K \sin(x+y) dx dy$, kde $K = \langle 0, \pi/4 \rangle \times \langle 0, \pi/4 \rangle$;
g) $\iint_K (x+y^2) dx dy$, kde $K = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$;
h) $\iint_K xy \sin x dx dy$, kde $K = \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \times \langle 0, \pi/4 \rangle$;

Návod: Dvojné integrály převedte na dvojnásobné pomocí Fubiniovy věty: pro $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ platí

$$\iint_K f(x, y) dx dy \equiv \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Výsledky:

- a) $[49/4]$; b) $[\pi^2/4]$; c) $[e-1]$; d) $[49/4]$; e) $[1/8]$; f) $[\sqrt{2}-1]$; g) $[11/3]$; h) $[\pi^2/16]$.
-
-

Vypočítejte dvojné integrály:

- a) $\iint_K (ax+by) dx dy$, kde $K = \langle 0, \alpha \rangle \times \langle 0, \beta \rangle$, kde a, b, α, β jsou zadané konstanty ($\alpha > 0, \beta > 0$);
b) $\iint_K (ax^2 + by^2) dx dy$, kde $K = \langle -\alpha, \alpha \rangle \times \langle -\beta, \beta \rangle$, kde a, b, α, β jsou zadané konstanty ($\alpha > 0, \beta > 0$);
c) $\iint_K xy dx dy$, kde $K = \langle \alpha - \Delta, \alpha + \Delta \rangle \times \langle \beta - \Delta, \beta + \Delta \rangle$, α, β, Δ jsou zadané konstanty ($\Delta > 0$);
d) $\iint_K \sin(k_x x + k_y y + \varphi) dx dy$, kde $K = \langle 0, 2\pi/k_x \rangle \times \langle 0, 2\pi/k_y \rangle$, k_x, k_y, φ jsou zadané konstanty ($k_x k_y \neq 0$);

Výsledky:

- a) $[(a\alpha^2\beta + b\beta^2\alpha)/2]$; b) $[4\alpha\beta(\alpha^2 a + \beta^2 b)/3]$; c) $[(2\alpha\beta\Delta)^2]$; d) $[2 \sin \varphi / (k_x k_y)]$.
-
-

Dvojný integrál $\iint_K f(x, y) dx dy$ udává objem tělesa ležícího pod grafem funkce f na množině K . Pomocí dvojného integrálu určete objemy následujících těles ¹:

- a) $f(x, y) = x + 1/y$, $K = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$;
- b) $f(x, y) = y/(x + y)^2$, $K = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$;
- c) kvádrů o hranách a , b a c ;
- d) trojbokého hranolu, jehož podstavu tvoří rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník o odvěsně a a jehož stěny jsou obdélníky o stranách a , resp. $\sqrt{2}a$;
- e) trojbokého hranolu, jehož podstavu tvoří rovnostranný trojúhelník o straně a a jehož stěny jsou obdélníky o stranách a a b .

Výsledky:

- a) $[1/2 + \ln 2]$; b) $[5 \ln 2 - 3 \ln 3]$; c) $[abc]$; d) $[ab^2 / 2]$; e) $[\sqrt{3}a^2 b / 4]$.
-
-

¹ Pokuste se o náčrtek těchto těles.