Vybrané aplikace integrálního počtu

Pomocí určitého integrálu vypočítejte plošný obsah:

a) oblasti ohraničené křivkou $y = \sin x$ a osou x na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$;
b) oblasti ohraničené křivkami $y^2 = 2x + 1$ a $x - y - 1 = 0$;
c) oblasti ohraničené oblouky křivek $y = x^n$ a $y = \sqrt[n]{x}$, kde n je zadané přirozené číslo;
d) obdélníka o stranách a a b;
e) pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách a a b a přeponě c;
f) trojúhelníka s vrcholy o souřadnicích A = [0;0], B = $[b;0]$ a C = $[c_1; c_2]$, kde b, c_1 a c_2 jsou zadané kladné konstanty (porovnejte se vzorcem známým z elementární geometrie);
g) kruhu o poloměru r;
h) elipsy o poloosách a a b.

Výsledky:
a) $[2]$; b) $[16/3]$; c) $[(n-1)/(n+1)]$; d) $[ab]$; e) $[ab/2]$; f) $[bc_2/2]$; g) $[\pi r^2]$; h) $[\pi ab]$.

Pomocí integrálního počtu určete délky následujících křivek:

a) úsečky spojující dva zadané body v rovině;
b) kružnice o poloměru r;
c) Neilovy paraboly $ay^2 - x^3 = 0$ (a je zadaná kladná konstanta) na intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$.
d) Řetězovky $\frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$, a je zadaná kladná konstanta, na intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$; (**Návod:** Užijte substituce $u = e^{x/a}$.)
e) evolventy kružnice o poloměru r, jejíž parametrické rovnice jsou $x = r(\cos t + t \sin t)$, $y = r(\sin t - t\cos t)$, na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$;
f) úsečky spojující dva zadané body v prostoru;
g) oblouku křivky $y = \ln x$ na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, kde $x_1 > 0$; (**Návod:** Rozšiřte integrand zlomkem $\frac{x}{x}$ a užijte speciální substituce $u^2 = x^2 + 1$.)
h) oblouku křivky $y = e^x$ na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$. (**Návod:** Použijte substituci $t = e^x$ a využijte výsledků předcházejícího příkladu.)

Výsledky:

a) $\left[\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}\right]$;

b) $[2\pi r]$;

c) $\left[\frac{8a}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}\frac{x_0}{a}\right)^{3/2} - 1\right]\right]$;

d) $\left[\frac{a}{2}\left(e^{x_0/a} - e^{-x_0/a}\right)\right]$;

e) $\left[\pi^2 r/2\right]$;

f) $\left[\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}\right]$;

g) $\left[\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x/\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right)\right]_{x_1}^{x_2}$;

h) $\left[x + \sqrt{1+e^{2x}} - \ln\left|1+\sqrt{1+e^{2x}}\right|\right]_{x_1}^{x_2}$

Pomocí integrálního počtu vypočítejte objemy následujících rotačních těles:

a) válce o poloměru podstavy r a výšce h;
b) kužele o poloměru podstavy r a výšce h;
c) komolého kužele o poloměrech podstav r_1 a r_2 ($r_1 > r_2$) a výšce h;
d) koule o poloměru r;
e) kulové úseče o výšce h odříznutého rovinou z koule o poloměru r;
f) rotačního elipsoidu o poloosách a a b;
g) rotačního paraboloidu vzniklého otáčením paraboly $y^2 = 2px$ (p je zadaná kladná konstanta) na intervalu $\langle 0, a\rangle$ kolem osy x;

Výsledky:
a) $[\pi r^2 h]$; b) $[\pi r^2 h/3]$; c) $\left[\pi h\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)/3\right]$; d) $[4\pi r^3/3]$; e) $[\pi h^2(3r-h)/3]$; f) $[4\pi ab^2/3]$; g) $[\pi pa^2]$.

Pomocí integrálního počtu vypočítejte povrchy následujících rotačních těles:

a) pláště válce o poloměru podstavy r a výšce h;
b) pláště kužele o poloměru podstavy r a výšce h;
c) pláště komolého kužele o poloměrech podstav r_1 a r_2 ($r_1 > r_2$) a výšce h;
d) koule o poloměru r;
e) kulového vrchlíku o výšce h odříznutého rovinou z koule o poloměru r;
f) plochy vzniklé rotací řetězovky $y = (a/2)\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ na intervalu $\langle -c, c\rangle$ kolem osy x (a a c jsou zadané kladné konstanty); (**Návod:** Užijte substituce $u = e^{x/a}$.)
g) plochy vzniklé rotací křivky $y = \sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ kolem osy x. (**Návod:** Užijte substituce $u = \cos x$.)

Výsledky:
a) $[2\pi rh]$; b) $\left[\pi r\sqrt{r^2+h^2}\right]$; c) $\left[\pi(r_1+r_2)\sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}\right]$; d) $[4\pi r^2]$; e) $[2\pi rh]$;
f) $\left[(\pi a^2/2)\left(e^{2c/a} - e^{-2c/a} + 4c/a\right)\right]$; g) $\left[2\sqrt{2}\pi + \pi\ln(3+2\sqrt{2})\right]$.
