Vektorové a komplexní funkce
(jedné reálné proměnné)

Nezbytnou teorii naleznete v Breviáři vyšší matematiky (odstavce 1.7 - 1.8).

vektorové funkce
komplexní funkce

Vektorové funkce

(zpět na začátek)

Příklad 1

Pro vektorovou funkci $\mathbf{f}(t)=\left[\dfrac{t^2-1}{t-1},\dfrac{t^3-1}{t-1}\right]$ nalezněte $\lim\limits_{t\to 1}\mathbf{f}(t)$.

Řešení

Limitu vektorové funkce počítáme po složkách. Pro $\mathbf{f}(t)=[f_1(t),f_2(t)]$ tedy platí

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)=\left[\lim_{t\to t_0}f_1(t),\lim_{t\to t_0}f_2(t)\right].$$

V tomto příkladu máme

$$f_1(t)=\frac{t^2-1}{t-1},\quad f_2(t)=\frac{t^3-1}{t-1}\quad \text{a}\quad t_0=1.$$

Proto

$$\lim_{t\to 1}\mathbf{f}(t)=\left[\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t-1},\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t-1}\right].$$

Obě limity vypočítáme snadno

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{t-1}=\lim_{t\to 1}(t+1)=2,$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}=\lim_{t\to 1}(t^2+t+1)=3,$$

a dostaneme takto

$$\lim_{t\to 1}\mathbf{f}(t)=[2,3].$$

Příklad 2

Pro vektorovou funkci $\mathbf{f}(t)=[R_0\cos(\omega t),R_0\sin(\omega t)]$, kde R_0 a ω jsou kladná reálná čísla, určete $\mathbf{f}'(2\pi/\omega)$.

Řešení

Derivaci vektorové funkce počítáme po složkách. Tak např. pro $\mathbf{f}(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ platí

$$\mathbf{f}'(t_0) = \left[f_1'(t_0), f_2'(t_0)\right].$$

V tomto příkladu je

$$f_1(t) = R_0\cos(\omega t)\,,\quad f_2(t) = R_0\sin(\omega t)\quad \text{a}\quad t_0 = 2\pi/\omega\,.$$

Můžeme tedy psát

$$f_1'(t) = -R_0\omega\sin(\omega t)\quad \text{a}\quad f_1'\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = -R_0\omega\sin\left(\omega\frac{2\pi}{\omega}\right) = -R_0\omega\sin 2\pi = 0\,,$$

$$f_2'(t) = R_0\omega\cos(\omega t)\quad \text{a}\quad f_2'\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = R_0\omega\cos\left(\omega\frac{2\pi}{\omega}\right) = R_0\omega\cos 2\pi = R_0\omega\,,$$

a tudíž i

$$\mathbf{f}'(t) = [-R_0\omega\sin(\omega t), R_0\omega\cos(\omega t)]$$

a

$$\mathbf{f}'(2\pi/\omega) = [0, R_0\omega].$$

Komplexní funkce

(zpět na začátek)

Příklad 3

Pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ nalezněte první derivaci komplexní funkci $f(t) = e^{\mathrm{i}\omega t}$, ω je reálné číslo.

Řešení

Pro komplexní funkci $f(t) = f_1(t) + \mathrm{i}f_2(t)$ platí $f^{(n)}(t) = f_1^{(n)}(t) + \mathrm{i}f_2^{(n)}(t)$. Libovolná derivace (tedy i první) komplexní funkce je tedy dána odpovídajícími derivacemi její reálné a imaginární části.

Pro nalezení reálné a imaginární části funkce ze zadání tohoto příkladu použijeme známý vzorec $e^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, pomocí nějž můžeme psát

$$f(t) = \cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\,.$$

Vzhledem k

$$\cos(\omega t)' = -\omega\sin(\omega t)\quad \text{a}\quad \sin(\omega t)' = \omega\cos(\omega t)\,,$$

máme též

$$f'(t) = -\omega\sin(\omega t) + \mathrm{i}\,\omega\cos(\omega t)\,.$$