První diferenciál, Taylorova věta

pro funkce jedné reálné proměnné

První diferenciál
Taylorův rozvoj

Nezbytnou teorii naleznete v Breviáři vyšší matematiky (odstavec 1.5).

První diferenciál

(zpět na začátek)

Příklad 1

Pomocí věty o prvním diferenciálu dokažte přibližnou rovnost $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$, kde α je reálné číslo a x je malé reálné číslo.

Řešení

Podle věty o prvním diferenciálu platí

$$f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a),$$

kde nyní je $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ a $a=0$.

Proto můžeme psát

$$f(a)=f(0)=(1+0)^{\alpha}=1,$$

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\; f'(a)=f'(0)=\alpha(1+0)^{\alpha-1}=\alpha,$$

a tedy

$$f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a)=f(0)+f'(0)(x-0)=1+\alpha(x-0)=1+\alpha x,$$

neboli

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x.$$

Příklad 2

Pomocí věty o prvním diferenciálu určete přibližně hodnotu $\sqrt[3]{100}$.

Řešení

Číslu 100 jsou blízké dvě třetí mocniny celého čísla: $4^3 = 64$ a $5^3 = 125$. Nabízí se tedy možnost provést rozklad 100 = 64 + 36 (resp. 100 = 125 - 25) a použít přibližného vzorce z příkladu 1:

a) $\sqrt[3]{100}=\sqrt[3]{64+36}=4\sqrt[3]{1+\frac{36}{64}}=4\sqrt[3]{1+\frac{9}{16}} \approx 4\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{9}{16}\right)=4\left(1+\frac{3}{16}\right)=4+\frac{3}{4}=4,75,$

b) $\sqrt[3]{100}=\sqrt[3]{125-25}=5\sqrt[3]{1-\frac{25}{125}}=5\sqrt[3]{1-\frac{1}{5}}\approx 5\left(1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right)=5\left(1-\frac{1}{15}\right)=5-\frac{1}{3}\doteq 4,67$.

Získané výsledky porovnejte s hodnotou přesnou na pět desetinných míst $\sqrt[3]{100}\doteq 4,64159$.

Taylorův rozvoj

(zpět na začátek)

Příklad 3

Pomocí Taylorova rozvoje pro e^x určete hodnotu Eulerova čísla.

Řešení

Taylorův rozvoj n-tého řádu funkce e^x nabývá na okolí $x = 0$ tvaru

$$e^x \approx T_n(x;e^x,0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k .$$

Můžeme proto psát

$$e=e^1\approx T_n(1;e^x,0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Numerické výsledky, které můžeme takto získat pro různé hodnoty n jsou shrnuty v následující tabulce. Porovnejte je s hodnotou přesnou na 9 desetinných míst ($e\doteq 2,718281828$).

n	$T_n(1;e^x,0)$
0	1,0
1	2,0
2	2,5
3	2,666666667
4	2,708333333
5	2,716666667
6	2,718555556
7	2,718253968
8	2,718278770
9	2,718281526
10	2,718281801

Již pomocí Taylorových polynomů poměrně nízkých řádů jsme tedy schopni určit hodnotu Eulerova čísla velmi přesně.

Příklad 4

Pomocí Taylorova rozvoje pro $\operatorname{arctg}(x)$ se pokuste určit hodnotu Ludolfova čísla.

Řešení

Víme například, že $\pi = 4\times\operatorname{arctg}(1)$. Pokusíme se proto určit hodnotu Ludolfova čísla pomocí přibližného vztahu $\pi \approx 4\times T_n(1;\operatorname{arctg},0)$. Nejdříve ovšem musíme najít příslušný Taylorův polynom, a to dostatečně vysokého řádu. Pro jednoduchost a přehlednost se omezíme na řád čtvrtý. Čtenář se ovšem může pokusit o dosažení řádů vyšších.

Nalezení $T_n(x;\operatorname{arctg},0)$

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x),\ f(0) = \operatorname{arctg}(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2},\ f''(0) = -\frac{2\times 0}{\left(1+0^2\right)^2} = 0,$$

$$f'''(x) = \frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3},\ f'''(0) = \frac{6\times 0^2-2}{\left(1+0^2\right)^3} = -2,$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24x(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^4},\ f^{(4)}(0) = \frac{24\times 0\times(1-0^2)}{\left(1+0^2\right)^4} = 0.$$

Můžeme tedy psát

$$T_4(x;\operatorname{arctg},0) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-2)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 = x - \frac{1}{3}x^3.$$

Určení Ludolfova čísla

$$\pi \approx 4\times T_n(1;\operatorname{arctg},0) = 4\times(1-\frac{1}{3}) = \frac{8}{3} \doteq 2,67.$$

Poznámka

Všimněte si, že získaný výsledek není vůbec přesný. Na rozdíl od příkladu 3, kdy jsme byli schopni určit poměrně přesnou hodnotu Eulerova čísla pomocí Taylorových polynomů poměrně nevysokých řádů, bychom nyní k dosažení dostatečné přesnosti museli použít Taylorova polynomu velmi vysokého řádu. Funkce *arctg* není proto pro výpočet hodnoty Ludolfova čísla příliš vhodná.