Vyšetřování průběhu funkcí
jedné reálné proměnné

Nezbytnou teorii naleznete v Breviáři vyšší matematiky (odstavec 1.4).

Příklad 1

Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Řešení

Maximální definiční obor

Protože výraz $1+x^2$ je vždy nenulový, je maximální definiční obor studované funkce totožný s množinou všech reálných čísel, $D_f=\mathbb{R}$.

Průsečíky s osou y

$$f(0)=\frac{0}{1+0^2}=0$$

Průsečíky s osou x

$$f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{1+x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$$

Body nespojitosti

Funkce je spojitá (viz též zde) na množině všech reálných čísel, neboť $g(x)=x$ a $h(x)=1$ jsou spojitými funkcemi a podle věty o součtu, součinu a podílu spojitých funkcí je spojitou i funkce studovaná.

Limity v nekonečnu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+x}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}+\infty}=\frac{1}{0+\infty}=\frac{1}{+\infty}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+x}=\frac{1}{\frac{1}{-\infty}-\infty}=\frac{1}{0-\infty}=\frac{1}{-\infty}=0$$

Intervaly monotonie

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{x'\left(1+x^2\right)-x\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1\left(1+x^2\right)-x\left(2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2},$$

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1,1),$$

$$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-x^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).$$

Na intervalu (-1,1) je tedy studovaná funkce rostoucí, na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$ klesající.

Lokální extrémy

Na základě právě určených intervalů monotonie vidíme okamžitě, že v bodě x = -1 nabývá studovaná funkce svého lokálního minima a v bodě x = 1 lokálního maxima. Ověřte přímo výpočtem nulových bodů první derivace funkce a s pomocí znaménka druhé derivace.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti

$$f''(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)'' = \left[\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right]' = \frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)^{2'}}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{(-2x)\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)\left[2\left(1+x^2\right)2x\right]}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2x\left(3-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3},$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x\left(3-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(3-x^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}\right).$$

Na intervalech $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},0)$, $(0,\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3},+\infty)$ nemění tedy druhá derivace studované funkce znaménko. Snadným výpočte ověříme, že

- pro $x \in (-\infty,-\sqrt{3})$ je $f''(x) < 0$, a tedy funkce *f* je na tomto intervalu konkávní,
- pro $x \in (-\sqrt{3},0)$ je $f''(x) > 0$, a tedy funkce *f* je na tomto intervalu konvexní,
- pro $x \in (0,\sqrt{3})$ je $f''(x) < 0$, a tedy funkce *f* je na tomto intervalu konkávní,
- pro $x \in (\sqrt{3},+\infty)$ je $f''(x) > 0$, a tedy funkce *f* je na tomto intervalu konvexní.

Asymptota v $-\infty$

$$k_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+(-\infty)^2} = \frac{1}{1+\infty} = 0,$$

$$q_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - k_{-\infty}x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{1+x^2} - 0x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

Asymptotou v $-\infty$ je osa x.

Asymptota v $+\infty$

$$k_{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\infty^2} = \frac{1}{1+\infty} = 0\,,$$

$$q_{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - k_{+\infty}x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{1+x^2} - 0x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0\,.$$

Asymptotou v $+\infty$ je osa x.

Graf