Spojitost a limita
funkcí jedné reálné proměnné

Poznámka
Vyšetření spojitosti funkce je možno podle definice převést na výpočet limity. V dalším se proto soustředíme jen problém výpočtu limit.

Poznámka
Limitu funkce v zadaném bodě můžeme počítat

přímo pomocí definice,
použitím vět o algebře limit,
pomocí pokročilejších vět (např. L'Hospitalovo pravidlo).

V této kapitole se soustředíme na první dvě metody, nezbytnou teorii je možno nalézt v Breviáři vyšší matematiky (odstavec 1.1). L'Hospitalovu pravidlu je věnována kapitola samostatná.

Výpočet limity pomocí definice

(zpět na začátek)

První krok, který musíme učinit, je určení limit vybrané (dostatečně) široké třídy funkcí přímo z definice. Teprve pak můžeme využít pokročilejších vět a pravidel (algebraické věty o limitách, L'Hospitalovo pravidlo).

Použití definice limity je ovšem v konkrétních případech velmi obtížný technický problém vyžadující zpravidla netriviální znalosti o nerovnostech. Proto si tento postup můžeme ilustrovat jen na nejjednodušších příkladech.

Vlastní limita ve vlastním bodě

Jaký je tedy obvyklý postup při důkazu tvrzení, že "*funkce f má v bodě a limitu A*", tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$?

1) Doplníme konkrétní údaje ze zadání příkladu do definice, tj. konkrétní tvar funkce f a konkrétní hodnoty čísel a a A do výrokové formy

   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

   jejíž pravdivost máme dokázat. Tedy - pro libovolné kladné číslo ε musíme být schopni nalézt takové kladné číslo δ, aby byla splněna výše uvedená implikace.

2) Důkaz provedeme tak, že výraz $|f(x) - A|$ upravujeme tak dlouho, až jej převedeme prostřednictvím posloupnosti nerovností $|f(x) - A| \le \ldots \le \alpha|x-a|$ na výraz $\alpha|x-a|$, kde α je kladné číslo. Děláme to proto, že pak již stačí k zadanému ε volit δ tak, aby

3) $\delta < \varepsilon/\alpha$. Při této volbě totiž platí $\varepsilon > \alpha\delta > \alpha|x-a| \ge |f(x) - f(a)|$, a tedy i $\varepsilon > |f(x) - f(a)|$.

Příklad 1

Dokažte, že $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Řešení

ad 1) Máme dokázat pravdivost výroku

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon,$$

kde jsme dosadili $f(x) = x$, $a = x_0$, $A = x_0$.

ad 2) Zde ovšem $|f(x) - A| \equiv |x - x_0| = |x - a| \left(\equiv |x - x_0|\right)$. Není tedy zapotřebí žádných úvah, abychom viděli, že můžeme volit $\alpha = 1$, a tedy

ad 3) $\delta = \varepsilon$. Tím je ovšem důkaz dokončen.

Příklad 2

Dokažte, že $\lim\limits_{x \to x_0} q = q$, q je libovolná reálná konstanta.

Řešení

Dokazujeme pravdivost

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |q - q| < \varepsilon.$$

Zde už ovšem není vůbec nic k dokazování, neboť $|q - q| = 0$, což je vždy menší než libovolné kladné ε. Bez ohledu na to, jaké hodnoty nabývá δ. Toto číslo můžeme proto volit zcela libovolně.

Příklad 3

Dokažte, že pro $k \neq 0$ platí $\lim\limits_{x \to x_0} \left(kx + q\right) = kx_0 + q$.

Řešení

ad 1) Musí platit

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\left(kx + q\right) - \left(kx_0 + q\right)\right| < \varepsilon.$$

ad 2) $\left|\left(kx + q\right) - \left(kx_0 + q\right)\right| = |kx + q - kx_0 - q| = |kx - kx_0| = |k||x - x_0|$. Volíme proto $\alpha = |k|$ a

ad 3) $\delta < \varepsilon / |k|$, např. $\delta = \varepsilon / \left(2|k|\right)$.

Příklad 4

Dokažte, že $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Řešení

ad 1) Dokazujeme platnost tvrzení $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$.

ad 2) $|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2|$. Zdálo by se, že jsme hotovi a že stačí zvolit $\alpha = |x+2|$. Ve skutečnosti tomu tak není, neboť α musí být konstanta, a nesmí tudíž záviset na proměnné x. Odpověď na otázku, jak pokračovat, vychází z faktu, že limita je lokální pojem a při jejím zkoumání stačí, když se omezíme na nějaké okolí bodu a, zde $a = 2$. Volba tohoto okolí je ponechána zcela na naší libovůli, můžeme se například omezit na $U_1(2)$, tedy interval $(1,3)$. Musíme si ale pamatovat, že při závěrečné volbě δ musíme dodržet právě učiněný předpoklad $\delta \le 1$. Pak ovšem platí 1< x, a tedy 3 < x+2. Proto můžeme psát

$$|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| < 3|x-2|$$

a volit $\alpha = 3$.

ad 3) Proto volíme $\delta < \varepsilon/3 \wedge \delta \le 1$, např. $\delta = \varepsilon/6$ pro $\varepsilon < 6$ a $\delta = 1$ pro $\varepsilon \ge 6$.

Příklad 5

Dokažte, že pro $x_0 \ne 0$ platí $\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^{\,2}$. (Sami si dokažte platnost tvrzení $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.)

Řešení

ad 1) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^{\,2}| < \varepsilon$.

ad 2) $|x^2 - x_0^{\,2}| = |(x+x_0)(x-x_0)| = |x+x_0||x-x_0| \le (|x|+|x_0|)|x-x_0| < \dfrac{3}{2}|x_0||x-x_0|$. V poslední nerovnosti se omezujeme na okolí $U_{|x_0|/2}(x_0)$, a musíme si proto pamatovat, že δ musí být menší než $|x_0|/2$.

ad 3) $\alpha = 3/2|x_0|$ a $\delta < \varepsilon/(3|x_0|/2) \wedge \delta \le |x_0|/2$.

Ostatní typy limit

Použijeme obdobný postup, jaký jsme nastínili výše. Jen ve druhém a třetím bodě musíme modifikovat úvahy podle konkrétního typu limity. Pro jednoduchost si to ukážeme na konkrétních příkladech.

Příklad 6 **(vlastní limita v nevlastním bodě)**

Dokažte, že platí $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Řešení

1) Máme dokázat, že platí $\forall\varepsilon > 0\ \exists K > 0: \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad x > K \Rightarrow |1/x| < \varepsilon$.

2) Pro $x > K > 0$ můžeme psát $|1/x| = 1/x$. Dále platí $1/x < \varepsilon \Leftrightarrow x > 1/\varepsilon$. Stačí proto volit

3) $K > 1/\varepsilon$, neboť z $x > K > 1/\varepsilon$ vyplývá $1/x < \varepsilon$.

Příklad 7 **(nevlastní limita ve vlastním bodě)**

Dokažte, že platí $\lim_{x\to0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Řešení

1) Máme dokázat, že platí $\forall M > 0\ \exists\delta > 0: \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad 0 < x < \delta \Rightarrow 1/x > M$.

2) Pro $1/x > M$ můžeme psát $x < 1/M$. Stačí proto volit

3) $\delta < 1/M$, neboť z $x < \delta$ vyplývá $1/x > 1/\delta$, a tedy i $1/x > M$.

Příklad 8 **(nevlastní limita v nevlastním bodě)**

Dokažte, že platí $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

Řešení

1) Máme dokázat platnost tvrzení $\forall M > 0\ \exists K < 0: \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x < K \Rightarrow x^2 > M$.

2) Z $x^2 > M$ plyne po odmocnění $|x| > \sqrt{M}$ a vzhledem k tomu, že se můžeme omezit na záporná x (blížíme se přece do $-\infty$), dále též $-x > \sqrt{M}$, neboli $x < -\sqrt{M}$. Stačí proto zvolit

3) $K < -\sqrt{M}$. Z $x < K < -\sqrt{M}$ totiž plyne $-x = |x| > \sqrt{K}$, a tedy po umocnění (na kladných číslech ekvivalentní operace) i $x^2 > M$.

Použití vět o algebře limit

(zpět na začátek)

Znění vět o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí je možno nalézt Breviáři vyšší matematiky (odstavec 1.1).

Příklad 9 (limita součtu)

Dokažte, že platí $\lim_{x\to x_0}(kx+q)=kx_0+q$.

Řešení

Tuto limitu jsme počítali pomocí definice v příkladu 3. Nyní si ukážeme jiný postup, v němž využijeme věty o limitě součtu a součinu:

$$\lim_{x\to x_0}(kx+q)=\lim_{x\to x_0}(kx)+\lim_{x\to x_0}q=\lim_{x\to x_0}k\lim_{x\to x_0}x+\lim_{x\to x_0}q=kx_0+q\,.$$

Za prvním rovnítkem jsme využili větu o limitě součtu, za druhým o limitě součinu a nakonec i výsledky, k nimž jsme dospěli dříve: $\lim_{x\to x_0}k=k$, $\lim_{x\to x_0}q=q$ (viz příklad 2) a $\lim_{x\to x_0}x=x_0$ (viz příklad 1).

Příklad 10 (limita součinu)

Dokažte, že platí $\lim_{x\to x_0}x^2={x_0}^2$.

Řešení

$\lim_{x\to x_0}x^2=\lim_{x\to x_0}x\lim_{x\to x_0}x=x_0x_0={x_0}^2$, kde jsme využili výsledku příkladu 1 : $\lim_{x\to x_0}x=x_0$.

Příklad 11 (limita vícenásobného součinu)

Dokažte, že platí $\lim_{x\to x_0}x^n={x_0}^n$.

Řešení

$$\lim_{x\to x_0}x^n=\lim_{x\to x_0}x\lim_{x\to x_0}x^{n-1}=\lim_{x\to x_0}x\lim_{x\to x_0}x\lim_{x\to x_0}x^{n-2}=\ldots=\overbrace{\lim_{x\to x_0}x\lim_{x\to x_0}x\ldots\lim_{x\to x_0}x}^{n-krát}=\overbrace{x_0x_0\ldots x_0}^{n-krát}={x_0}^n\,,$$

kde jsme opět využili výsledku příkladu 1 : $\lim_{x\to x_0}x=x_0$.

<u>Příklad 12</u> (limita podílu)

Dokažte, že platí $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{x_0{}^n}$.

Řešení

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} 1}{\lim\limits_{x \to x_0} x^n} = \frac{1}{x_0{}^n},$$

kde jsme využili, kromě věty o limitě podílu, i výsledek řešení příkladu 11, $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0{}^n$.