L´Hospitalovo pravidlo

Pomocí L´Hospitalova pravidla počítáme limity typu 0/0, ∞/∞, 0.∞, 1^∞, 0^0, ∞^0 a ∞ - ∞. Nezbytnou teorii naleznete v Breviáři vyšší matematiky (odstavec 1.6).

Limity typu 0/0

(zpět na začátek)

Příklad 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

Řešení

Ověření předpokladů L´Hospitalovy věty

Přímočarým použitím věty o limitě podílu získáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}x}=\frac{0}{0}.$$

Jedná se tedy o neurčitou limitu typu 0/0 a můžeme použít L´Hospitalova pravidla.

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1.$$

Příklad 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Řešení

Ověření předpokladů L´Hospitalovy věty

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)}{\lim\limits_{x\to 0}x^2}=\frac{0}{0}.$$

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{0-(-\sin x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

Použitím L´Hospitalova pravidla jsme tedy dospěli k limitě z příkladu 1. O té ale víme, že je rovna jedné. Můžeme proto psát

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}.$$

Pokud bychom ale výsledek příkladu 1 neměli k dispozici, museli bychom použít L´Hospitalova pravidla ještě jednou.

Příklad 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

Řešení

Ověření předpokladů L´Hospitalovy věty

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-1\right)}{\lim\limits_{x\to 0}x}=\frac{0}{0}.$$

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-0}{1}=\lim_{x\to 0}e^x=1.$$

Poznámka
Rovnosti

$$\lim_{x\to 0}\sin x/x=1 \text{ a } \lim_{x\to 0}(e^x-1)/x=1$$

se používají při odvození vzorců pro derivaci goniometrických funkcí ($\sin x$ a $\cos x$) a exponenciální funkce (e^x) pomocí definice derivace. Jejich "důkaz" prostřednictvím L´Hospitalova pravidla, kdy zmíněné vzorce pro derivace používáme, není jistě korektní. Příklady 1 a 3 musíme proto chápat pouze jako ilustrace použití L´Hospitalova pravidla, nikoliv jako důkaz těchto rovností.

Limity typu ∞/∞

(zpět na začátek)

Příklad 4

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$$

Řešení

Ověření předpokladů L´Hospitalovy věty
Přímočarým použitím věty o limitě podílu získáváme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Jedná se tedy o neurčitou limitu typu ∞/∞ a můžeme použít L´Hospitalova pravidla.

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Příklad 5

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$$

Řešení

Ověření předpokladů L´Hospitalovy věty

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}e^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$$

Limity typu 0.∞

(zpět na začátek)

Příklad 6

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)$$

Řešení

Převedení na L´Hospitalovu limitu

Limita, kterou se máme nyní zabývat, není ani neurčitou limitou typu 0/0, ani limitou typu ∞/∞. L´Hospitalova pravidla nemůžeme tedy použít, aniž provedeme jisté úpravy limitovaného výrazu. V tomto případě vede k cíli úprava

$$x\ln x=\frac{\ln x}{1/x},$$

která uvedenou limitu převádí na typ ∞/∞. Platí totiž

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty .$$

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x \ln x\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\ln x\right)'}{\left(1/x\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\frac{x^2}{1}\right) = -\lim_{x\to 0^+} x = 0 .$$

Příklad 7

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x^2 e^{-x^2}\right)$$

Řešení

Převedení na L´Hospitalovu limitu
Úprava

$$x^2 e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}},$$

převádí uvedenou limitu na typ ∞/∞. Platí totiž

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to +\infty} e^{x^2} = +\infty .$$

Při výpočtu této limity již můžeme použít L´Hospitalovo pravidlo.

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x^2 e^{-x^2}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0 .$$

Limity typu 1^∞

(zpět na začátek)

Příklad 8

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+ax\right)^{1/x}, \; a \in \mathbb{R}$$

Řešení

Převedení na L´Hospitalovu limitu
Na počítanou limitu nelze použít L´Hospitalovo pravidlo přímo a je nutno nejdříve provést úpravu

$$\left(1+ax\right)^{1/x} = e^{\ln\left(1+ax\right)^{1/x}} = e^{\frac{\ln\left(1+ax\right)}{x}} .$$

Pak můžeme psát

$$\lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)}{x}}.$$

Použití L´Hospitalova pravidla
Především platí

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)'}{x'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+ax}a}{1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{a}{1+ax} = a,$$

a proto i

$$\lim_{x\to 0^+}\lim(1+ax)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)}{x}} = e^a.$$

Limity typu 0^0

(zpět na začátek)

Příklad 9

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

Řešení
Dříve, než použijeme L´Hospitalovo pravidlo, musíme provést úpravu

$$x^x = e^{x\ln x},$$

pomocí které již můžeme psát

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}.$$

Tím je původní limita převedena na výpočet limity $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ z příkladu 6. Tam je ukázáno, že platí $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, a proto platí i

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Limity typu ∞^0

(zpět na začátek)

Příklad 10

$$\lim_{x\to +\infty}(1+ax)^{1/x},\ a>0$$

Řešení

Převedení na L´Hospitalovu limitu
Úprava, kterou použijeme před aplikací L´Hospitalova pravidla, je stejná jako v příkladu 8

$$\left(1+ax\right)^{1/x}=e^{\ln\left(1+ax\right)^{1/x}}=e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}}.$$

Můžeme tedy psát

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+ax\right)^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+ax)}{x}}.$$

Použití L´Hospitalova pravidla

Samotné L´Hospitalovo pravidlo použijeme na výpočet limity v exponentu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+ax\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+ax\right)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+ax}a}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{1+ax}=\frac{a}{1+a(+\infty)}=\frac{a}{+\infty}=0.$$

Pro původní limitu takto získáváme

$$\lim_{x\to+\infty}\lim\left(1+ax\right)^{1/x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+ax)}{x}}=e^{0}=1.$$

Limity typu ∞ – ∞

(zpět na začátek)

Příklad 11

$$\lim_{x\to\pi/2^{+}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)$$

Řešení

Převedení na L´Hospitalovu limitu

Pomocí úpravy

$$\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

převedeme původní limitu (typu ∞ – ∞) na novou limitu

$$\lim_{x\to\pi/2^{+}}\frac{1-\sin x}{\cos x},$$

která je typu 0/0. Při výpočtu této nové limity můžeme tedy použít L´Hospitalovo pravidlo.

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to\pi/2^{+}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2^{+}}\frac{\left(1-\sin x\right)'}{\cos x'}=\lim_{x\to\pi/2^{+}}\frac{0-\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to\pi/2^{+}}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$