Lokální a globální extrémy
funkcí jedné reálné proměnné

Nezbytnou teorii naleznete Breviáři vyšší matematiky (odstavec 1.3).

Lokální extrémy

(zpět na začátek)

Postup při hledání lokálních extrémů:

i) Nalezneme podezřelé body, tj. body, v nichž má funkce nulovou první derivaci (nebo první derivaci nemá či dokonce není ani spojitá).

ii) V těchto bodech určíme hodnotu druhé derivace studované funkce. Je-li kladná, jedná se o lokální minimum, je-li záporná, jedná se o lokální maximum. Pokud je druhá derivace nulová, musíme ke konečnému rozhodnutí o povaze extrému použít derivace vyšší.

Pokud v některém z podezřelých bodů první derivace neexistuje, nebo je funkce dokonce nespojitá, test s druhou (vyšší) derivací pochopitelně neprovádíme. O povaze extrému musíme zpravidla rozhodnout přímo pomocí definice (lokálních extrémů). Velmi užitečný bývá obrázek, který obvykle získáme vyšetřením průběhu studované funkce na malém redukovaném okolí podezřelého bodu.

Příklad 1

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Řešení

i) Podezřelé body

$$f'(x) \equiv \left(x^2 - 3x + 4\right)' = 2x - 3,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2.$$

Žádné další podezřelé body neexistují, protože funkce je spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

ii) Test s druhou derivací

$$f''(x) \equiv \left(x^2 - 3x + 4\right)'' = \left(2x - 3\right)' = 2,$$
$$f''(3/2) = 2 > 0.$$

Funkce tedy nabývá pro $x = 3/2$ lokálního minima.

Příklad 2

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$.

Řešení

i) Podezřelé body

$$f'(x) \equiv \left(-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1\right)' = -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4\,,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1\,.$$

Žádné další podezřelé body neexistují, protože funkce je spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

ii) Test s druhou derivací

$$f''(x) \equiv \left(-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1\right)'' = \left(-4x^3 + 12x^2 - 12x + 4\right)' = -12x^2 + 24x - 12\,,$$
$$f''(1) = 0\,.$$

Pomocí samotné druhé derivace nelze tedy o existenci ani o povaze lokálního extrému rozhodnout.

iii) Test s vyššími derivacemi

$$f'''(x) = \left(-12x^2 + 24x - 12\right)' = -24x + 24\,,\; f'''(1) = 0\,.$$
$$f^{(4)}(x) = \left(-24x + 24\right)' = -24\,,\; f^{(4)}(1) = -24 < 0\,.$$

První nenulovou derivací je tedy derivace čtvrtá (sudá!), funkce má proto v bodě $x = 1$ lokální extrém. Protože je tato derivace záporná, jedná se o lokální maximum.

Příklad 3

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3$.

Řešení

i) Podezřelé body

$$f'(x) \equiv {x^3}' = 3x^2\,,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

Žádné další podezřelé body neexistují, protože funkce je spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

ii) Test s druhou derivací

$$f''(x) \equiv x^{3''} = \left(3x^2\right)' = 6x\,,$$
$$f''(0) = 0\,.$$

Na základě druhé derivace nelze tedy o existenci ani o povaze lokálního extrému rozhodnout.

iii) Test s vyššími derivacemi

$$f'''(x) = \left(6x\right)' = 6\,,\ f'''(0) = 6 > 0\,.$$

První nenulovou derivací je tedy derivace třetí (lichá!), funkce nemá proto v bodě $x = 0$ lokální extrém. Ve skutečnosti se jedná o inflexní bod.

Příklad 4

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = |x|$.

Řešení

i) Podezřelé body

$$f'(x) \equiv x' = 1 \text{ pro } x > 0,$$
$$f'(x) \equiv \left(-x\right)' = -1 \text{ pro } x < 0.$$

Jediným podezřelým bodem je tedy bod $x = 0$, v němž nemá funkce $f(x) = |x|$ první derivaci.

ii) Pomocí obrázku již snadno nahlédneme, že v tomto bodě nabývá funkce lokálního minima.

Globální extrémy

(zpět na začátek)

Postup při hledání globálních extrémů na intervalu $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$:

i) na intervalu (a,b) nalezneme body v nichž funkce nabývá lokálních extrémů,
ii) k nim přidáme krajní body intervalu a získáme tak množinu bodů podezřelých,
iii) pro všechny podezřelé body určíme funkční hodnoty studované funkce a seřadíme je podle velikosti.
iv) V bodě (bodech), v němž je funkční hodnota největší, nabývá funkce na daném intervalu globálního maxima, v bodě (bodech), v němž je funkční hodnota nejmenší, globálního minima.

Při **hledání globálních extrémů na polouzavřených či otevřených intervalech**, musíme věnovat zvýšenou pozornost krajním bodům, viz příklady 6 a 7.

Příklad 5

Nalezněte (globální) extrémy funkce $f(x) = x^2 - 3x + 4$ na intervalu $\langle 0,2 \rangle$.

Řešení

i) Podezřelé body na $(0,2)$

$$f'(x) \equiv \left(x^2 - 3x + 4\right)' = 2x - 3,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \in (0,2).$$

Žádné další podezřelé body na uvedeném intervalu neexistují, protože funkce je spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

ii) Všechny podezřelé body

$x_1 = 0$ - levý krajní bod intervalu,
$x_2 = 3/2$ - lokální extrém,
$x_3 = 2$ - pravý krajní bod intervalu.

iii) Tabulka funkční hodnot

$$f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + 4 = 4,$$
$$f(3/2) = (3/2)^2 - 3 \times (3/2) + 4 = 1{,}75,$$
$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 4 = 2.$$

iv) Globální extrémy

V bodě $x = 3/2$ nabývá funkce globálního minima na intervalu $\langle 0,2 \rangle$ (toto minimum je současně minimem lokálním) a v bodě $x = 0$ globálního maxima (toto maximum není lokálním maximem studované funkce).

Příklad 6

Nalezněte (globální) extrémy funkce $f(x) = x^2 - 3x + 4$ na intervalu $\left(0, 2\right\rangle$.

Řešení (viz též příklad 5)

i) Podezřelé body na $(0, 2)$

$$f'(x) \equiv \left(x^2 - 3x + 4\right)' = 2x - 3,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \in (0, 2).$$

Žádné další podezřelé body na uvedeném intervalu neexistují, protože funkce je spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

ii) Všechny podezřelé body

$x_1 = 0$ - levý krajní bod intervalu
(Pozor! Nepatří do množiny, na které globální extrémy hledáme),
$x_2 = 3/2$ - lokální extrém,
$x_3 = 2$ - pravý krajní bod intervalu.

iii) Tabulka funkční hodnot

$$f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + 4 = 4,$$
$$f(3/2) = (3/2)^2 - 3 \times (3/2) + 4 = 1{,}75,$$
$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 4 = 2.$$

iv) Globální extrémy

V bodě $x = 3/2$ nabývá funkce globálního minima na intervalu $\left\langle 0, 2\right\rangle$ (toto minimum je současně minimem lokálním).

Globálního maxima by studovaná funkce měla nabývat v bodě $x = 0$. Tento bod však do intervalu $\left(0, 2\right\rangle$ nepatří. Na intervalu $\left(0, 2\right\rangle$ tedy funkce maxima nenabývá.

Příklad 7

Nalezněte (globální) extrémy funkce $f(x) = x^2 - 3x + 4$ na intervalu $(2, 3)$.

Řešení

i) Podezřelé body na $(2, 3)$

$$f'(x) \equiv \left(x^2 - 3x + 4\right)' = 2x - 3,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \notin (2, 3).$$

Bod $x = 3/2$ tedy mezi podezřelé nezahrneme. Žádné další podezřelé body na uvedeném intervalu neexistují, protože funkce je spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

ii) Všechny podezřelé body

$x_1 = 2$ - levý krajní bod intervalu,

$x_2 = 3$ - pravý krajní bod intervalu.

Pozor! Ani jeden z podezřelých bodů nepatří do množiny, na které globální extrémy hledáme. Funkce $f(x) = x^2 - 3x + 4$ proto na intervalu $(2,3)$ nenabývá ani svého maxima ani minima.

Použití

(zpět na začátek)

Úloha nalézt extrémy funkcí jedné, ale i více reálných proměnných se často vyskytuje v přírodovědných, technických a dokonce i v ekonomických a finančních aplikacích. Zpravidla vyžaduje důkladnou analýzu, při které se snažíme na základě obecného zadání formulovat zadání matematické, tj. určit

a) funkci, jejíž extrémy máme hledat,
b) interval hodnot, kterých může nezávislá proměnná (nastavitelný parametr) nabývat.

Teprve po splnění těchto kroků můžeme přistoupit k vyhledávání extrémů prostředky a postupy, které jsme procvičovali výše.

Příklad 8

Motouzem o délce *L* vymezte obdélníkový pozemek maximálního plošného obsahu.

Řešení

Analýza úlohy

Obdélník je zadán svými stranami *a* a *b*. Jeho obvod (který odpovídá délce motouzu *L*) je dán vztahem $O = 2(a+b)$ a plošný obsah vztahem $S = ab$.

Ze zadání úlohy plyne, že $L = 2(a+b)$, neboli $b = L/2\text{-}a$. A pro plošný obsah $S = a(L/2\text{-}a)$. Máme proto hledat maximum funkce

$$S(a) = a\,L/2 - a^2\,,$$

a to zřejmě na intervalu $a \in \langle 0, L/2 \rangle$.

Nalezení extrému

i) Podezřelé body na $(0, L/2)$

$$S'(a) = \left(a\,L/2 - a^2\right)' \equiv \frac{d\left(a\,L/2 - a^2\right)}{da} = L/2 - 2a\,,$$
$$S'(a) = 0 \Leftrightarrow L/2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = L/4 \in (0, L/2)\,.$$

Žádné další podezřelé body neexistují, protože funkce je spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

ii) Všechny podezřelé body

$a_1 = 0$ - levý krajní bod intervalu

$a_2 = L/4$ - lokální extrém,
$a_3 = L/2$ - pravý krajní bod intervalu.

iii) Tabulka funkční hodnot

$$S(0) = 0 \times L/2 - 0^2 = 0\,,$$
$$S(L/4) = (L/4) \times (L/2) - (L/4)^2 = L/16\,,$$
$$S(L/2) = (L/2) \times (L/2) - (L/2)^2 = 0\,.$$

iv) Globální maximum

Funkce $S(a) = a\,L/2 - a^2$ nabývá svého globálního maxima na intervalu $\langle 0, L/2 \rangle$ v bodě $a = L/4$. Hledaný obdélník má proto rozměry $a = b = L/4$, jedná se tedy o čtverec.