Derivace
funkcí jedné reálné proměnné

Poznámka
Derivaci funkce v zadaném bodě můžeme počítat

přímo pomocí definice,
použitím vět o algebře derivací,
použitím věty o derivaci inverzní funkce,
použitím věty o derivaci složené funkce.

Nezbytnou teorii naleznete Breviáři vyšší matematiky (odstavec 1.2).

Výpočet derivace pomocí definice

(zpět na začátek)

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \equiv \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Příklad 1

$$x' \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$$

Řešení

$$x' = \lim_{z\to x}\frac{z-x}{z-x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1,$$

$$x' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1.$$

Příklad 2

$$x^{2\prime} \equiv \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = 2x$$

Řešení

$$x^{2\prime} = \lim_{z\to x}\frac{z^2-x^2}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{(z+x)(z-x)}{z-x} = \lim_{z\to x}(z+x) = x+x = 2x,$$

$$x^{2\prime} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

Příklad 3

$$x^{n\prime} \equiv \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$$

Řešení

$$x^{n\prime} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x+\Delta x\right)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots \binom{n}{n-1} x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots \binom{n}{n-1} x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots \binom{n}{n-1} x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + \ldots \binom{n}{n-1} x\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1} \right] = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1} .$$

Pozor!
Ne vždy dospíváme při výpočtu první derivace k tak jednoduchým limitám jako v předcházejících příkladech.

Příklad 4

$$\cos(x)' \equiv \frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$$

Řešení

$$\cos(x)' \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \sin(x)\sin(\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos(x) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} - \sin(x) \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) = \cos(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} - \sin(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} .$$

Během výpočtu jsme tak dospěli k limitám, jejichž vyčíslení není vůbec jednoduché. Proto musíme uvěřit, že platí

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0 \ \text{ a } \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1 .$$

Odtud pak již snadno plyne

$$\cos(x)' = 0 - \sin(x) = -\sin(x) .$$

Příklad 5

$$\sin(x)' \equiv \frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$$

Řešení

$$\sin(x)' \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\sin(\Delta x) + \sin(x)\cos(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin(x) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x) \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) = \sin(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} .$$

Z předcházejícího příkladu už umíme získané limity spočítat. Pak ovšem již snadno získáme požadovaný výsledek.

Příklad 6

$$e^{x\prime} \equiv \frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$$

Řešení

$$e^{x\prime} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} .$$

A opět netriviální limita, pro kterou lze ukázat

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 .$$

Odtud již snadno požadovaný výsledek.

Výpočet derivace pomocí vět o algebře derivací

(zpět na začátek)

Příklad 7

$$\mathrm{tg}(x)' = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Řešení

$$\mathrm{tg}(x)' = \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]' = \frac{\sin(x)'\cos(x) - \sin(x)\cos(x)'}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Příklad 8

$$\mathrm{cotg}(x)' = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cotg}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Řešení

$$\mathrm{cotg}(x)' = \left[\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right]' = \frac{\cos(x)'\sin(x) - \cos(x)\sin(x)'}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)},$$

$$\mathrm{cotg}(x)' = \left[\frac{1}{\mathrm{tg}(x)}\right]' = \frac{1'\mathrm{tg}(x) - 1\mathrm{tg}(x)'}{\mathrm{tg}^2(x)} = \frac{-1/\cos^2(x)}{\mathrm{tg}^2(x)} = -\frac{1/\cos^2(x)}{\sin^2(x)/\cos^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Příklad 9

$$x^{-n\,\prime} = \frac{\mathrm{d}x^{-n}}{\mathrm{d}x} = -nx^{-n-1}$$

Řešení

$$x^{-n\,\prime} = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1'x^n - 1x^{n\,\prime}}{\left(x^n\right)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

Výpočet derivace pomocí věty o derivaci inverzní funkce

(zpět na začátek)

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}},$$

kde na pravé straně po provedení derivace a eventuálních úprav provedeme záměnu

$$y \to f^{-1}(x)$$

Příklad 10

$$\ln(x)' \equiv \frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$

Řešení

$$\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}e^y}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

Příklad 11

$$\log_a(x)' \equiv \frac{\mathrm{d}\log_a(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(a)}$$

Řešení

Použijte identitu $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ a pokračujte jako v příkladu 10.

Příklad 12

$$x^{\frac{1}{n}}{}' \equiv \frac{\mathrm{d}x^{\frac{1}{n}}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$$

Řešení

$$\frac{\mathrm{d}x^{\frac{1}{n}}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sqrt[n]{x}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$$

Příklad 13

$$\arcsin(x)' \equiv \frac{\mathrm{d}\arcsin(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Řešení

$$\frac{\mathrm{d}\arcsin(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\sin(y)}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pořádně si rozmyslete, proč můžeme výše psát $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$ a $\sin(\arcsin(x)) = x$.

Příklad 14

$$\arccos(x)' \equiv \frac{\mathrm{d}\arccos(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Řešení

$$\frac{\mathrm{d}\arccos(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\cos(y)}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{-\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pořádně si rozmyslete, proč můžeme výše psát $\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}$ a $\cos(\arccos(x)) = x$.

Příklad 15

$$\mathrm{arctg}(x)' \equiv \frac{\mathrm{d}\mathrm{arctg}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Řešení

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{arctg}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\mathrm{tg}(y)}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(y)}} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(y)} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Pořádně si rozmyslete, že platí $1+\mathrm{tg}^2(y) = \frac{1}{\cos^2(y)}$ a $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x)) = x$.

Příklad 16

$$\operatorname{arccotg}(x)' \equiv \frac{\mathrm{d}\operatorname{arccotg}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Řešení

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{arccotg}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\operatorname{cotg}(y)}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2(y)}} = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2(y)} = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2(\operatorname{arccotg}(\mathrm{x}))} = -\frac{1}{1+x^2}\,..$$

Pořádně si rozmyslete, že platí $1+\operatorname{cotg}^2(y) = \frac{1}{\sin^2(y)}$ a $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}(x)) = x$.

Výpočet derivace pomocí věty o derivaci složené funkce

(zpět na začátek)

$$\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \left.\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y\to g(x)} .\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x},$$

kde v prvním členu na pravé straně rovnosti provedeme po derivování náhradu $y \to g(x)$.

Příklad 17

$$\sqrt{kx+q}' \equiv \frac{\mathrm{d}\sqrt{kx+q}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}k\frac{1}{\sqrt{kx+q}}$$

Řešení

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{kx+q}}{\mathrm{d}x} = \begin{bmatrix} f(y) = \sqrt{y} \\ g(x) = kx+q \end{bmatrix} = \left.\frac{\mathrm{d}\sqrt{y}}{\mathrm{d}y}\right|_{y\to kx+q} .\frac{\mathrm{d}(kx+q)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}.k = \frac{1}{2}k\frac{1}{\sqrt{kx+q}}$$

Příklad 18

$$a^{x\prime} \equiv \frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = a^x \ln(a)$$

Řešení

Trik: $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$

$$\frac{\mathrm{d}e^{x\ln(a)}}{\mathrm{d}x} = \begin{bmatrix} g(y) = e^y \\ f(x) = x\ln(a) \end{bmatrix} = \left.\frac{\mathrm{d}e^y}{\mathrm{d}y}\right|_{y=x\ln(a)} .\frac{\mathrm{d}(x\ln(a))}{\mathrm{d}x} = e^{x\ln(a)}\ln(a) = a^x\ln(a)$$

Příklad 19

$$x^{\alpha\prime} \equiv \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0$$

Řešení

$$\text{Trik: } x^{\alpha} = e^{\ln(x^{\alpha})} = e^{\alpha \ln(x)}$$

$$\frac{\mathrm{d}e^{\alpha \ln(x)}}{\mathrm{d}x} = \begin{bmatrix} g(y) = e^{y} \\ f(x) = \alpha \ln(x) \end{bmatrix} = \left.\frac{\mathrm{d}e^{y}}{\mathrm{d}y}\right|_{y=\alpha \ln(x)} . \frac{\mathrm{d}\left(\alpha \ln(x)\right)}{\mathrm{d}x} = e^{\alpha \ln(x)} \frac{\alpha}{x} = x^{\alpha} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$