Nevlastní integrály

Vypočítejte následující nevlastní integrály:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x$ ($n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, $a>0$);

b) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ($a>0$);

c) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{x^{1/2}}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{x^{1/n}}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{a}\frac{1}{x^{1/n}}\,\mathrm{d}x$ ($n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, $a>0$);

d) $\displaystyle\int_0^{a}\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x$ ($n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, $a>0$);

e) $\displaystyle\int_a^{+\infty}x^n\,\mathrm{d}x$ ($n\in\mathbb{N}$, $a>0$).

Výsledky:

a) $[1]\left[\frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{n-1}\right]\left[\frac{1}{n-1}a^{1-n}\right]$;

b) $[+\infty]$;

c) $[2]\left[\frac{3}{2}\right]\left[\frac{n}{n-1}\right]\left[\frac{n}{n-1}a^{1-1/n}\right]$;

d) $[+\infty]$;

e) $[+\infty]$.

Vypočítejte následující nevlastní integrály:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ ($n\in\mathbb{N}, n\geq 2$);

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$ ($n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, $a>0$);

e) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-a}^{0}\frac{1}{(a+x)^n}\,\mathrm{d}x$ ($n\in\mathbb{N}$, $a>0$).

Výsledky:

a) $\left[\frac{1}{2}\pi\right]\left[-\frac{1}{2}\pi\right]$ [0];

b) $\left[\frac{1}{2a}\pi\right]\left[-\frac{1}{2a}\pi\right]$ [0];

c) $[+\infty]\,[+\infty]\,[+\infty]$;

d) $[1]\left[\frac{1}{n-1}\right]\left[\frac{1}{n-1}a^{1-n}\right]$;

e) $[+\infty]\,[-\infty]\,[+\infty]\,[+\infty]$.

Vypočítejte následující nevlastní integrály:

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} e^{x}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_0^{+\infty} e^{ax+b}\,\mathrm{d}x$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<0$);

c) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} x^ne^{-x}\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{0} x^ne^{x}\,\mathrm{d}x$ ($n\in\mathbb{N}$);

d) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} x^ne^{-x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{0} x^ne^{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$ ($n\in\mathbb{N}$),

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky:

a) $[1]\,[+\infty]\,[1]\,[+\infty]$;

b) $\left[-\frac{1}{a}e^{b}\right]$;

c) $[1]\,[2]\,[n!]\,\left[(-1)^n\,n!\right]$;

d) $\left[\frac{1}{2}\right]\,\left[\frac{1}{n+1}\right]\,\left[\frac{1}{n+1}\text{ pro } n \text{ sudá, } +\infty \text{ pro } n \text{ lichá}\right]$;

e) [2] [2] [0].

Vypočítejte následující nevlastní integrály:

a) $\int_0^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$; $\int_0^{\infty} |\cos x|\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{0} |\cos x|\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x$;

d) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$;

e) $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$;

f) $\int_0^{\infty} e^{-\left(x+e^{-x}\right)}\,\mathrm{d}x$;

Výsledky:

a) [neexistuje] [neexistuje] $[+\infty]\,[+\infty]$;

b) $\left[\frac{1}{2}\ln 3\right]$;

c) $\left[2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$;

d) $[1-\cos 1]$

e) $\left[\frac{1}{4}\pi\right]$;

f) $[1-1/e]$.
