Newtonův a Riemannův určitý integrál

Vypočítejte následující určité integrály:

a) $\int_0^1 \mathrm{d}x$, $\int_1^0 \mathrm{d}x$, $\int_a^b \mathrm{d}x$;

b) $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$, $\int_1^0 x^n \mathrm{d}x$, $\int_a^b x^n \mathrm{d}x$;

c) $\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $\int_{-3}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $\int_1^x \frac{dt}{t}$ $(x>0)$;

d) $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$, $\int_0^\pi \cos x \,\mathrm{d}x$, $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ [1], $\int_0^\pi \sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$, $\int_{-\pi/4}^{-\pi/2} \frac{1}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

f) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$, $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$;

g) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1}$, $\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1}$;

h) $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Výsledky:

a) [1] [-1] [$b-a$];

b) [$\frac{1}{n+1}$] [$-\frac{1}{n+1}$] [$\frac{1}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)$];

c) [$\ln\frac{4}{3}$] [$\ln\frac{2}{3}$] [$\ln x$];

d) [2] [0] [2] [2];

e) [1] [-1];

f) [$\frac{1}{4}\pi;\frac{1}{2}\pi$];

g) [$1-\frac{1}{4}\pi; 2-\frac{1}{2}\pi$];

h) [$\frac{1}{6}\pi;\frac{1}{2}\pi$].

Při výpočtu určitých integrálů metodou *per partes* používáme vzorec

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x .$$

Pomocí tohoto vzorce vypočítejte následující určité integrály:

---

[1] Pozor na správný výpočet odmocniny: $\sqrt{a^2} = |a|$!

a) $\int_1^b \ln x \,\mathrm{d}x$,kde b je zadaná konstanta, $b > 1$;

b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$, $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^{k\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$, $\int_0^{k\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$, kde k je celé číslo.

Výsledky:

a) $[\, b(\ln b - 1) + 1 \,]$;

b) $[\, \frac{1}{4}\pi; \frac{1}{4}\pi \,]$;

c) $[\, \frac{1}{4}k\pi; \frac{1}{4}k\pi \,]$.

Odvoďte dále rekurentní vztahy pro výpočet následujících určitých integrálů a výsledné vzorce použijte k výpočtu uvedených integrálů pro konkrétní hodnoty přirozeného čísla *n* (např. *n* = 5).

a) $\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x$;

b) $\int_1^e \ln^n x \,\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^{\pi} \sin^n x \,\mathrm{d}x$, $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$.

Výsledky:

a) $[120 - 44e]$;

b) $[120 - 44e]$;

c) $[\, \frac{16}{15} \,]\ [\, \frac{8}{15} \,]$;

d) $[\, \frac{5}{24} + \frac{35}{512}\pi \,]$.

Při výpočtu určitých integrálů substituční metodou používáme vzorce

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} y = f(x) & A = f(a) \\ \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x & B = f(b) \end{bmatrix} = \int_A^B g(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = h(t) & \alpha = h^{-1}(a) \\ \mathrm{d}x = h'(t)\mathrm{d}t & \beta = h^{-1}(b) \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta f(h(t))\,h'(t)\mathrm{d}t\,.$$

Pomocí těchto vzorců vypočítejte následující určité integrály:

a) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\mathrm{d}x$, $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{10} x \sin x \, dx$, $\int\limits_0^{\pi} \cos^5 x \, dx$;

c) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$;

d) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2} dx$, $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2-3x-4} dx$ [2], $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4x+4} dx$ [2];

e) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$, $\int\limits_{-1}^0 \sqrt{1+x^2}\, dx$;

f) $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} dx$;

g) $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

Výsledky:

a) $\left[\ln 5;\ \tfrac{1}{2}\pi\right]$;

b) $\left[\tfrac{1}{11};\ 0\right]$;

c) $\left[2-\tfrac{1}{2}\pi\right]$;

d) $\left[\operatorname{arctg} 2-\tfrac{1}{4}\pi\right]$ $\left[\tfrac{2}{5}\ln\tfrac{2}{3}\right]$ $\left[\tfrac{2}{3}\right]$;

e) $\left[\tfrac{1}{4}\pi\right]$ $\left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\ln\sqrt{1+\sqrt{2}}\right]$;

f) $\left[e-1+\ln\left[4/(e+1)^2\right]\right]$;

g) $\left[\tfrac{1}{4}\pi^2\right]$

---

[2] Pozor na definiční obor primitivní funkce !