Vybrané speciální integrály

Pro každou primitivní funkci určete její definiční obor !

Vypočítejte integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$:

a) $\int \frac{1}{x-\sqrt{x}} \mathrm{d}x$;

b) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \mathrm{d}x$;

c) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} \mathrm{d}x$;

d) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}} \mathrm{d}x$.

Návod: Převeďte na racionální lomenou funkci substitucí $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Výsledky:

a) $\left[2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + C\right]$;

b) $\left[\sqrt{1-x^2} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{(1-x)/(1+x)} + C\right]$; použijete-li rozkladu $(1-x)/(1+x) = 1/\sqrt{1-x^2} - x/\sqrt{1-x^2}$, můžete získat též jednodušší cestou výsledek $\left[\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C\right]$;

c) $\left[2\sqrt{x+1} + \ln\left|\left(\sqrt{x+1}-1\right)/\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right| + C\right]$;

d) $\left[\frac{3}{10}\sqrt[3]{(1-x)^2}\,(2x+3) + C\right]$.

Vypočítejte integrály typu $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x$:

a) $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$;

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}} \mathrm{d}x$;

c) $\int \frac{\sqrt{-x^2+3x-2}}{2x-x^2} \mathrm{d}x$;

Výsledky:

a) $\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{3}{2}\ln(\sqrt{x^2+1}+x)\right]$;

b) $\left[\sqrt{x^2+2x+4} - \ln\sqrt{x^2+2x+4} + x + 1\right]$;

c) $\left[2\operatorname{arctg}\sqrt{(x-1)/(2-x)} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{(2x-2)/(2-x)}\right]$.

Vypočítejte integrály typu $\int R\left(\sin x,\ \cos x\right)dx$:

a) $\displaystyle\int\frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Návod: Převeďte na racionální lomenou funkci substitucí $t=\mathrm{tg}(x/2)$. V příkladech (d) a (e) použijte substituci $t=\mathrm{tg}\,x$.

Výsledky:

a) $\left[\mathrm{tg}(x/2)+\ln\cos^2(x/2)+C\right]$;

b) $\left[\mathrm{tg}(x/2)-\ln\cos^2(x/2)+C\right]$;

c) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\mathrm{tg}(x/2)-1+\sqrt{2}}{\mathrm{tg}(x/2)-1-\sqrt{2}}\right|+C\right]$;

d) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}\,x\right)+C\right]$;

e) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x)+C\right]$.

Vypočítejte integrály typu $\int R(e^x)\,\mathrm{d}x$:

a) $\displaystyle\int\frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int\frac{e^x-e^{2x}-e^{4x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

Návod: Použijte substituci $t=e^x$.

Výsledky:

a) $\left[-x+2\ln(e^x+1)+C\right]$;

b) $\left[\mathrm{arctg}(e^x)-e^{2x}/2+C\right]$.

Vypočítejte integrály typu $\int R\left(\ln x\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$:

a) $\displaystyle\int\frac{1}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^2 x - x}\,\mathrm{d}x$.

Návod: Převeďte na racionální lomenou funkci substitucí $t = \ln x$.

Výsledky:

a) $\left[\ln\left|1+\ln x\right| + C\right]$;

b) $\left[\frac{1}{2}\ln\left|(\ln x - 1)/(\ln x + 1)\right| + C\right]$.