Integrace metodou per partes

Pro každou primitivní funkci určete její definiční obor !

Vypočítejte:

a) $\int x \sin x \, dx$; (**Návod**: $f' = \sin x$, $g = x$.)

b) $\int x \cos x \, dx$;

c) $\int x^2 \sin x \, dx$; (**Návod**: $f' = \sin x$, $g = x^2$.)

d) $\int x^2 \cos x \, dx$;

e) $\int \sin^2 x \, dx$; (**Návod**: $f' = \sin x$, $g = \sin x$ a dále užijte $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ a $y = a - y \Rightarrow y = a/2$.)

f) $\int \cos^2 x \, dx$.

Výsledky:

a) $\left[\sin x - x \cos x + C\right]$;

b) $\left[\cos x + x \sin x + C\right]$;

c) $\left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C\right]$;

d) $\left[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C\right]$;

e) $\left[\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C\right]$;

f) $\left[\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C\right]$.

Vypočítejte:

a) $\int x e^x \, dx$, $\int x^2 e^x \, dx$; (**Návod**: $f' = e^x$.)

b) $\int (x-1)^2 e^x \, dx$; (**Návod**: $f' = e^x$, $g = (x-1)^2$.)

c) $\int \ln x \, dx$, $\int \ln^2 x \, dx$; (**Návod**: $f' = 1$.)

d) $\int x \ln x \, dx$; (**Návod**: $f' = x$, $g = \ln x$.)

e) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$. (**Návod**: $f' = 1/x$, $g = \ln x$ a dále užijte $y = a - y \Rightarrow y = a/2$.)

Výsledky:

a) $\left[e^x(x-1) + C; e^x(x^2 - 2x + 2) + C\right]$;

b) $\left[e^x (x^2 - 4x + 5) + C\right]$;

c) $\left[x(\ln x - 1) + C; x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C\right]$;

d) $\left[\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C\right]$;

e) $\left[\frac{1}{2} \ln^2 x + C\right]$.

Vypočítejte:

a) $\int \arcsin x \, dx$; (**Návod**: $f' = 1$, $g = \arcsin x$ a užijte $\sqrt{1-x^2}' = -x/\sqrt{1-x^2}$.)

b) $\int \arccos x \, dx$;

c) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$;

d) $\int \operatorname{arccotg} x \,\mathrm{d}x$.

Výsledky:

a) $\left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \right]$;

b) $\left[x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \right]$;

c) $\left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C \right]$;

d) $\left[x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C \right]$.

Pomocí metody *per partes* vypočítejte:

a) $\int f(x) f'(x) \,\mathrm{d}x$; (**Návod**: Užijte $y = a - y \Rightarrow y = a/2$.)

b) $\int f'(x) f''(x) \,\mathrm{d}x$, $\int f^{(n)}(x) f^{(n+1)}(x) \,\mathrm{d}x$.

Výsledky:

a) $\left[\frac{1}{2} f^2(x) + C \right]$;

b) $\left[\frac{1}{2}\left[f'(x) \right]^2 + C \right] \left[\frac{1}{2}\left[f^{(n)}(x) \right]^2 + C \right]$.

Dokažte rekurentní vzorce:

a) $\int x^n e^x \mathrm{d}x = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}$; (**Návod**: $f' = e^x$, $g = x^n$.)

b) $\int x^n \sin x \,\mathrm{d}x = -x^n \cos x + n x^{n-1} \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x \,\mathrm{d}x;\ n \in \mathbb{N}$; (**Návod**: $f' = \sin x$, $g = x^n$ a integraci *per partes* proveďte dvakrát.)

c) $\int x^n \cos x \,\mathrm{d}x = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x \,\mathrm{d}x;\ n \in \mathbb{N}$;

d) $\int \ln^k x \,\mathrm{d}x = x \ln^k x - k \int \ln^{k-1} x \,\mathrm{d}x;\ k \in \mathbb{N}$; (**Návod**: $f' = 1$, $g = \ln^k x$.)

e) $\int \sin^n x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x;\ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$; (**Návod**: $f' = \sin x$, $g = \sin^{n-1} x$ a dále využijte $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ a $y = a - y \Rightarrow y = a/2$.)

f) $\int \cos^n x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x;\ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Pomocí vzorců z předchozího cvičení vypočítejte následující integrály:

a) $\int x^6 e^x \,\mathrm{d}x$;

b) $\int x^6 \sin x \,\mathrm{d}x$, $\int x^6 \cos x \,\mathrm{d}x$;

c) $\int \ln^6 x \,\mathrm{d}x$;

d) $\int \sin^6 x \,\mathrm{d}x$, $\int \cos^6 x \,\mathrm{d}x$;

e) $\int \sin^5 x \,\mathrm{d}x$, $\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x$;

f) $\int \frac{1}{\sin^4 x} \mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\cos^4 x} \mathrm{d}x$.

Pokuste se rovněž vypočítat

g) $\int \frac{1}{\sin^5 x} \mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\cos^5 x} \mathrm{d}x$. (**Návod:** $\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$ resp. $\int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.)

Výsledky:

a) $\left[e^x\left(x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720\right) + C\right]$;

b)

$\left[-x^6 \cos x + 6x^5 \sin x + 30x^4 \cos x - 120x^3 \sin x - 360x^2 \cos x + 720x \sin x + 1440 \cos x + C\right]$

$\left[x^6 \sin x + 6x^5 \cos x - 30x^4 \sin x - 120x^3 \cos x + 360x^2 \sin x + 720x \cos x - 1440 \sin x + C\right]$;

c) $\left[x\left(\ln^6 x - 6\ln^5 x + 30\ln^4 x - 120\ln^3 x + 360\ln^2 x - 720\ln x + 720\right) + C\right]$;

d)

$\left[-\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x - \frac{5}{24}\cos x \sin^3 x - \frac{15}{48}\cos x \sin x + \frac{15}{48}x + C\right]$

$\left[\frac{1}{6}\sin x \cos^5 x + \frac{5}{24}\sin x \cos^3 x + \frac{15}{48}\sin x \cos x + \frac{15}{48}x + C\right]$;

e) $\left[-\frac{1}{5}\cos x \sin^4 x - \frac{4}{15}\cos x \sin^2 x - \frac{8}{15}\cos x + C\right]$ $\left[\frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{15}\sin x \cos^2 x + \frac{8}{15}\sin x + C\right]$;

f) $\left[\frac{1}{3}\mathrm{cotg}\, x\left(-\frac{1}{\sin^2 x} + 2\right) + C\right]$ $\left[\frac{1}{3}\mathrm{tg}\, x\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\right) + C\right]$;

g) $\left[-\frac{1}{4}\cos x \sin^4 x - \frac{3}{8}\cos x \sin^{-2} x + \frac{3}{8}\ln\left|\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}\right| + C\right]$ $\left[\frac{1}{4}\sin x \cos^{-4} x + \frac{3}{8}\sin x \cos^{-2} x + \frac{3}{8}\ln\left|\mathrm{tg}\ \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C\right]$.