NEVLASTNÍ INTEGRÁLY

PŘÍKLAD 1

Vypočítejte nevlastní integrál $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Výpočet nevlastního integrálu s nekonečnou horní mezí, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, zahrnuje dva kroky:

a) výpočet odpovídající primitivní funkce $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$,

b) dosazení do vzorce $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\left[F(x)\right]_a^{+\infty} \equiv \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)-F(a)$.

V našem případě tyto kroky nabývají následující konkrétní podoby

a) $\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} y=x^2+1 \\ \mathrm{d}y=2x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2y}+C=\underline{-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C}$, [1]

b) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C\right]_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C\right]-\left[-\frac{1}{2\left(0^2+1\right)}+C\right]=$$

$$=-\frac{1}{2\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1\right)}+C+\frac{1}{2}-C=-\frac{1}{2\left((+\infty)^2+1\right)}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2(+\infty+1)}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2\cdot(+\infty)}+\frac{1}{2}=$$

$$=-\frac{1}{+\infty}+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{2}}.$$

A konečný výsledek tedy je

$$\underline{\underline{\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}}}.$$

Poznámka

Při výpočtu nevlastních integrálů, které jsou nakonec jen jakýmsi zobecněním integrálů určitých, musíme vždy ověřit, podobně jako u vlastních určitých integrálů, že primitivní funkce $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$ je definována na celém integračním oboru. Tj. na intervalu $\langle a,+\infty)$ pro integrály s nekonečnou horní mezí a na intervalu $(-\infty,b\rangle$ pro integrály s nekonečnou dolní mezí. V tomto i následujících příkladech (a samozřejmě též ve všech cvičeních) proveďte samostatně.

---

[1] Nepodstatnou integrační konstantu bychom ale mohli z dalších výpočtů vypustit, v následujícím kroku se stejně v rozdílu $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)-F(a)$ vyruší.

PŘÍKLAD 2

Vypočítejte nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{-1} xe^x \mathrm{d}x$.

Řešení

Ani pro integrály s nekonečnou dolní mezí, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, se neodchýlíme od postupu nastíněného v předcházejícím příkladu:

a) nejdříve určíme primitivní funkci $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$,

b) poté dosadíme do vzorce $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_{-\infty}^{b} \equiv F(b) - \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

Při výpočtu primitivní funkce použijeme tentokrát metodu *per partes* (uvádíme jen výsledek, výpočet si čtenář provede snadno samostatně; pro jednoduchost zápisu vypouštíme i nepodstatnou integrační konstantu)

$$\int xe^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x .$$

Dosazení do vzorce pro výpočet příslušného nevlastního integrálu vede pak k

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} xe^x \mathrm{d}x = \left[xe^x - e^x \right]_{-\infty}^{-1} = (-1)\cdot e^{-1} - e^{-1} - \lim_{x\to-\infty}\left(xe^x - e^x \right) = -2e^{-1} - \left(\lim_{x\to-\infty}(xe^x) - \lim_{x\to-\infty} e^x \right).$$

Druhou limitu v kulaté závorce již známe, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. První limita vede po aplikaci věty o limitě součinu na neurčitý výraz $-\infty\cdot 0$, musíme ji proto počítat pomocí L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x'}{(e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = -\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 .$$

S využitím výsledků pro obě limity můžeme psát nakonec i

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} xe^x \mathrm{d}x = -2e^{-1} - (0-0) = \underline{\underline{-2e^{-1} = -\tfrac{2}{e}}} .$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2

1. Vypočítejte následující nevlastní integrály

a) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$	d) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$	g) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x$	•j) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$
b) $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^n}\mathrm{d}x$ [2]	e) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$	h) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$	•k) $\int\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x$
c) $\int\limits_{a}^{+\infty} x^n\,\mathrm{d}x$ [3]	f) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$	i) $\int\limits_{-\infty}^{0} \lvert x\rvert e^{-\lvert x\rvert}\,\mathrm{d}x$	•l) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x$

[2] $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $a > 0$

[3] $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

PŘÍKLAD 3

Vypočítejte neurčitý integrál $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Podle obecného návodu z *Breviáře* počítáme nevlastní integrály, jejichž obě meze jsou nekonečné, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, tak, že je rozdělíme na dva nové nevlastní integrály, z nichž každý má již nekonečnou jen jednu mez:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Volba dělicího bodu c je přitom zcela ponechána na naši libovůli a výsledek výpočtu na ní nezávisí. Oba dílčí integrály počítáme podle postupu z příkladů 1 a 2.[4]

Pro naše zadání můžeme volit například $c = 0$ a psát

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{0} + \left[\operatorname{arctg} x\right]_{0}^{+\infty}} =$$

$$\left(\operatorname{arctg} 0 - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x\right) + \left(\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0\right) = 0 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2} - 0 = \underline{\underline{\pi}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 3

1. Vypočítejte následující nevlastní integrály. Pozor – nevlastní integrály mohou být i nekonečné. Nekonečný výsledek neznamená nutně chybu!

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\,\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{x}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$

c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{9+x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$

e) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$ [5]

f) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$

---

[4] Samozřejmě musíme ověřit platnost podmínky, že je integrand definován na celé reálné ose!

[5] Ve cvičeních c a d položte $c = 0$.