URČITÝ INTEGRÁL

PŘÍKLAD 1

Vypočítejte určitý integrál $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Obvyklý postup při výpočtu určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zahrnuje dva kroky

a) výpočet odpovídajícího integrálu neurčitého (primitivní funkce) $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$,

b) dosazení do vzorce $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\left[F(x)\right]_a^a \equiv F(b)-F(a)$.

V našem případě tyto kroky nabývají následující podoby

a) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\underline{x-\operatorname{arctg}x+C}$,[1]

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\left[x-\operatorname{arctg}x+C\right]_{-1}^{+1}\equiv\left(1-\operatorname{arctg}1+C\right)-\left(-1-\operatorname{arctg}(-1)+C\right)=$

$=2-\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}(-1)=2-\pi/4+\left(-\pi/4\right)=\underline{2-\pi/2}$.

Konečný výsledek tedy zní

$$\underline{\underline{\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=2-\pi/2.}}$$

PŘÍKLAD 2

Vypočítejte určitý integrál $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x^2+5x-5}{x+6}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Určité integrály nemusí být ovšem vždy tak snadno vyčíslitelné jako v předcházejícím příkladu. Nalezení primitivní funkce může totiž často vyžadovat netriviální výpočty, při nichž je třeba využít mnohé z toho, co jsme se pro neurčité integrály naučili. Ilustrací může být výše zadaný určitý integrál.

V prvním kroku opět hledáme nejdříve odpovídající primitivní funkci. Jedná se o úlohu integrace racionální lomené funkce s lineárním polynomem ve jmenovateli. V tuto chvíli si ale můžeme příslušný výpočet ušetřit, protože výsledek známe již z řešeného příkladu 2 části *Integrace racionálních lomených funkcí* [2]

$$\int\frac{x^2+5x-5}{x+6}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}x^2-x+\ln|x+6|.$$

[1] Integrační konstantu bychom ale mohli z dalších výpočtů vypustit, v následujícím kroku se stejně v rozdílu $F(b)-F(a)$ vyruší.

[2] Nepodstatnou integrační konstantu tentokrát již vypouštíme.

A druhý krok je již jen rutinní dosazení do vzorce

$$\int_0^1 \frac{x^2+5x-5}{x+6}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+6|\right]_0^1 = \left(\tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - 1 + \ln|1+6|\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 0^2 - 0 + \ln|0+6|\right) =$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2} + \ln 7\right) - \ln 6 = -\tfrac{1}{2} + \ln 7 - \ln 6 = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2} + \ln\tfrac{7}{6}}}\,.$$

Poznámka
V tuto chvíli je jistě na místě upozornit na jednu věc, kterou jsme zatím pomíjeli. A to, že primitivní funkce $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$ musí být definovaná na celém intervalu (a,b), na kterém výpočet určitého integrálu provádíme. Měli bychom tedy vždy tuto podmínku ověřit. V našem konkrétním příkladě je, zdá se, splněna. Definičním oborem funkce $F(x)=\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+6|$ jsou všechna reálná čísla mimo -6, $D_F = \mathbb{R} - \{-6\}$, a integrační obor $(0,1)$ do této množiny určitě patří. Nemělo by ale zajisté smyslu počítat výše uvedený určitý integrál např. v mezích -7 a -5.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2

1. Vypočítejte následující integrály

a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x$ •g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$ d) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ [3] f) $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ $(x>0)$ •h) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2+8x+20}\,\mathrm{d}x$

PŘÍKLAD 3

Vypočítejte určitý integrál $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Integrál z tohoto příkladu si žádá zajisté použití metody *per partes*. Při jeho výpočtu bychom sice mohli postupovat přesně podle programu příkladů 1 a 2 – nejdříve najít (pomocí metody *per partes*) primitivní funkci a ve druhém kroku dosadit do vzorce pro výpočet Newtonova určitého integrálu,[4] nabízí se ale ještě jedna možnost. A to použití obecného vzorce pro výpočet určitých integrálů metodou *per partes*

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x},$$

který snadno získáme spojením věty o integraci *per partes* pro neurčité integrály a definice Newtonova integrálu určitého. Použití tohoto obecného vzorce je v našem případě následující

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} f'(x)=e^x, & f(x)=e^x \\ g(x)=x, & g'(x)=1 \end{bmatrix} = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - \left(e^1 - e^0\right) = \underline{\underline{1}}\,.$$

[3] Pozor na správný výpočet odmocniny. Mějte na paměti, že $\sqrt{a^2}=|a|$.

[4] Určitě proveďte samostatně.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 3

1. Pomocí obecného vzorce pro určitou integraci *per partes* vypočítejte následující integrály

a) $\int_1^b \ln x \,\mathrm{d}x$, $b > 1$ b) $\int_1^e x^n \ln x \,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^{k\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$, $k \in \mathbb{N}$

2. Odvoďte rekurentní vzorce pro výpočet následujících určitých integrálů

●a) $\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x$ ●b) $\int_1^e \ln^n x \,\mathrm{d}x$ ●●c) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

PŘÍKLAD 4

Vypočítejte určitý integrál $\int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Rovněž při výpočtu určitých integrálů, které vedou na první či druhou větu o substituci, můžeme postupovat dvojím způsobem. Buď podle příkladů 1 či 2, tj. tak, že nejdříve nalezneme odpovídající primitivní funkci a následně dosadíme do Newtonova vzorce, nebo tak, že použijeme obecný vzorec pro substituční metodu výpočtu určitých integrálů. Pro *první větu o substituci* má tento obecný vzorec tvar

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y},$$

a zahrnuje tedy nejen provedení substituce v integrandu (a v integračním diferenciálu), ale nově i v integračních mezích. Použití tohoto vzorce má oproti prvnímu přístupu jednu významnou výhodu. Na závěr se nemusíme vracet, změnili-li jsme správně i integrační meze, k původní integrační proměnné.[5]

Integrál ze zadání tohoto příkladu si evidentně použití první věty o substituci žádá. Podívejme se tedy, jak v tomto konkrétním případě funguje výše uvedený obecný vzorec

$$\int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^2 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} g'(x) = 2x,\ g(x) = 1+x^2 \\ f(y) = \sqrt{y} \end{array}\right] = \tfrac{1}{2}\int_{1+0^2}^{1+2^2} \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\int_1^5 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5 =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \tfrac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 4

1. Pomocí první věty o substituci pro určité integrály určete

a) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}\, x \,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x \sin x \,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$

[5] Tato vlastnost je obzvláště výhodná při opakovaném použití druhé věty o substituci.

PŘÍKLAD 5

Vypočítejte určitý integrál $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Neurčitý integrál $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ vede na použití druhé věty o substituci. Z kapitoly 3.3 *Breviáře* například víte, že se při jeho výpočtu hodí substituce $x=\sin t$, $t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Postup podle příkladů 1 a 2 tedy především vyžaduje zopakování výpočtů z kapitoly 3.3 *Breviáře* a následné dosazení do Newtonova vzorce (proveďte samostatně). Alternativou je použití *druhé věty o substituci* pro určité integrály[6]

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = h(t) \\ \mathrm{d}x = h'(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h(t))\,h'(t)\mathrm{d}t}.$$

Pro naše konkrétní zadání to znamená

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\;\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} |\cos t|\cos t\;\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\;\mathrm{d}t\,.$$

Získaný integrál bychom dále počítali pomocí metody *per partes*. Protože jsme si ale tento výpočet odbyli již v části věnované této metodě (cvičení 1a k příkladu 2), můžeme napsat přímo výsledek

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\;\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\big(t+\sin t\cos t\big)\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}+\sin\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\big(0+\sin 0\cos 0\big) = \underline{\underline{\pi/4}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 5

1. Pomocí naznačených substitucí vypočítejte následující určité integrály.

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$, $x=t^2$ (tedy $t=\sqrt{x}$), $t \ge 0$

b) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\mathrm{d}x$, $x=\ln t$ (tedy $t=e^x$), $t>0$

c) $\int_{-2}^0 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$, $x=2\cos t$, $t\in(0,\pi)$

d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 x\,\mathrm{d}x$, $x=\arcsin t$ (tedy $t=\sin x$), $t\in\langle -1,1\rangle$

e) $\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$, $x=1/t$, $t\in(1,+\infty)$

f) $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, $x=t^2$ (tedy $t=\sqrt{x}$), $t\in(0,+\infty)$

---

[6] Protože platí $x=h(t)$, můžeme psát i $t=h^{-1}(x)$. Spodní integrační mez $x=a$ se tedy nutně musí změnit na $t=h^{-1}(a)$ a horní mez $x=b$ na $t=h^{-1}(b)$. Nedejme se ale zmást, pokud bude nová horní mez menší než nová mez dolní. I to se může stát!