INTEGRACE RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH FUNKCÍ

PŘÍKLAD 1

Vypočítejte $\int \frac{3}{-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Při výpočtu integrálů výše uvedeného typu postupujeme podle obecného návodu z příkladů 1a resp. 1b kapitoly 3.4 *Breviáře*:

$$\int \frac{3}{-5x+6}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{-5x+6}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} y=-5x+6 \\ \mathrm{d}y=-5\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\mathrm{d}y \end{bmatrix} = -\tfrac{3}{5}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x =$$

$$-\tfrac{3}{5}\ln|y|+C = \underline{\underline{-\tfrac{3}{5}\ln|-5x+6|+C}}\,.$$

PŘÍKLAD 2

Vypočítejte $\int \frac{x^2+5x-5}{x+6}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Dříve, než použijeme postupu z předcházejícího příkladu, musíme převést integrand našeho integrálu do tvaru s racionální lomenou funkcí s polynomem nultého stupně (konstantou) v čitateli. Toho dosáhneme dělením polynomů v čitateli a jmenovateli

$$\left(x^2+5x-5\right):\left(x+6\right)=x-1,\quad \text{zbytek } 1,$$

neboli

$$\frac{x^2+5x-5}{x+6}=x-1+\frac{1}{x+6}\,.$$

Výpočet zadaného integrálu je dále už přímočarý

$$\int \frac{x^2+5x-5}{x+6}\,\mathrm{d}x = \int\left(x-1+\frac{1}{x+6}\right)\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x-\int 1\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x+6}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2-x+\int\frac{1}{x+6}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{bmatrix} y=x+6 \\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}x^2-x+\ln|x+6|+C}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2

1. Vypočítejte následující integrály

a) $\int \frac{\sqrt{3}}{-x-1}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{(2x+3)^8}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{3x-1}{6x+3}\,\mathrm{d}x$

PŘÍKLAD 3

Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Vzhledem k tomu, že kvadratický dvojčlen ve jmenovateli je rozložitelný,

$$x^2-4=(x+2)(x-2)\,,$$

počítáme zadaný integrál podle příkladu 3a z kapitoly 3.4 *Breviáře*.

Nejdříve provedeme rozklad integrandu na parciální zlomky:

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}\,,$$

neboli

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{(A+B)x+(2B-2A)}{x^2-4}\,.$$

Má-li být tato rovnost splněná pro libovolné x z definičního oboru integrandu, musí platit

$$A+B=0\,,\quad 2B-2A=1\,.$$

Řešením těchto rovnic nakonec získáme

$$A=\tfrac{1}{4}\,,\ B=-\tfrac{1}{4}\,,$$

čili

$$\underline{\frac{1}{x^2-4}=\frac{\frac{1}{4}}{x+2}-\frac{\frac{1}{4}}{x-2}}\,.$$

A následuje integrace podle příkladu 3a z *Breviáře*

$$\int\frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x-\tfrac{1}{4}\int\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{4}\ln|x+2|-\tfrac{1}{4}\ln|x+2|+C=\underline{\underline{\tfrac{1}{4}\ln\frac{|x+2|}{|x-2|}+C}}.$$

PŘÍKLAD 4

Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Diskriminant kvadratického trojčlenu ve jmenovateli,

$$\Delta=2^2-4\times4\times1=-12\,,$$

je záporný, příslušný trojčlen není tedy na reálných číslech rozložitelný a my musíme začít (podle obecného návodu z příkladu 3c kapitoly 3.4 *Breviáře*) doplněním jmenovatele integrandu na úplný čtverec

$$x^2+2x+4=x^2+2x+1+(4-1)=(x+1)^2+3\,.$$

Následuje integrace podle obecného návodu z příkladu 3c *Breviáře*

$$\int \frac{1}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\int \frac{1}{\tfrac{1}{3}(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\int \frac{1}{\left[\tfrac{1}{\sqrt{3}}(x+1)\right]^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{bmatrix} y = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(x+1) \\ \mathrm{d}y = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{3}\mathrm{d}y \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3}\int \frac{1}{y^2+1}\sqrt{3}\,\mathrm{d}y = \tfrac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} y + C =$$

$$\underline{\underline{\tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\tfrac{1}{\sqrt{3}}(x+1)\right]+C}}\,.$$

PŘÍKLAD 5

Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+16x+64}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Diskriminant výrazu ve jmenovateli integrandu je nulový, kvadratický trojčlen má tedy jeden dvojný kořen. Snadno zjistíme, že tímto kořenem je $x_0 = -8$. Můžeme tedy psát

$$\frac{1}{x^2+16x+64} = \frac{1}{(x+8)^2}$$

a při integraci postupovat podle příkladu 1b kapitoly 3.4 *Breviáře*

$$\int \frac{1}{x^2+16x+64}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+8)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} y = x+8 \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y}+C = \underline{\underline{-\frac{1}{x+8}+C}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 3 – 5

1. Vypočítejte následující integrály

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-12x+36}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+8x+20}\,\mathrm{d}x$ •g) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2-12x+36\right)^{10}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+3x-6}\,\mathrm{d}x$ [(1)] d) $\displaystyle\int \frac{1}{-x^2+2\sqrt{3}x-3}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int \frac{1}{-2x^2+12x-20}\,\mathrm{d}x$ •h) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\,\mathrm{d}x$ [(2)]

PŘÍKLAD 6

Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Tentokrát postupujeme podle obecného příkladu 4 z kapitoly 3.4 *Breviáře*:

---

[1] Před samotným výpočtem podle obecného návodu vytkněte z jmenovatele konstantu 3. Podobná nápověda je platná i ve cvičeních d (vytýkáme -1), f (-2), g a h.

[2] Postupujte podle příkladu 4 a využijte rekurentní vzorec pro výpočet $\displaystyle\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}2\int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x =$$

$$\left[\begin{array}{l} y = x^2+2x-8 \\ \mathrm{d}y = (2x+2)\mathrm{d}x \end{array}\right] = \tfrac{1}{2}\ln|x^2+2x-8| - \int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\ln|x^2+2x-8| + \tfrac{1}{6}\ln\frac{|x-2|}{|x+4|} + C}}\,,$$

kde jsme při výpočtu prvního integrálu použili naznačenou substituci a při výpočtu integrálu druhého integrálu rozklad na parciální zlomky[3]

$$\frac{1}{x^2+2x-8} = \frac{\frac{1}{6}}{x-2} - \frac{\frac{1}{6}}{x+4}\,.$$

PŘÍKLAD 7

Vypočítejte $\displaystyle\int \frac{2x^5+4x^4-16x^3-x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Dříve, než zahájíme výpočet zadaného integrálu, musíme upravit integrand tak, aby polynom v čitateli byl nejvýše prvního stupně.[4] Dosáhneme toho dělením čitatele integrandu kvadratickým trojčlenem ve jmenovateli

$$\left(2x^5+4x^4-16x^3-x\right):\left(x^2+2x-8\right) = 2x^3, \quad \text{zbytek } -x\,,$$

po jehož provedení můžeme psát

$$\frac{2x^5+4x^4-16x^3-x}{x^2+2x-8} = 2x^3 - \frac{x}{x^2+2x-8}$$

nebo též

$$\int \frac{2x^5+4x^4-16x^3-x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x = \int\left(2x^3 - \frac{x}{x^2+2x-8}\right)\mathrm{d}x = \int 2x^3\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^4 - \int \frac{x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zadaný integrál jsme tedy převedli na integrál z příkladu 6 [5] a podle výsledku tohoto příkladu platí

$$\int \frac{2x^5+4x^4-16x^3-x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{2}\ln|x^2+2x-8| - \tfrac{1}{6}\ln\frac{|x-2|}{|x+4|} + C}}\,.$$

[3] Proveďte podrobně samostatně.
[4] Tj. stupně nižšího než je stupeň polynomu ve jmenovateli.
[5] Obecně na integrál z příkladu 4 z kapitoly 3.4 *Breviáře*.

Cvičení k příkladům 6 a 7

1. Vypočítejte následující integrály

a) $\int \frac{x-1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{2x}{x^2-2\sqrt{5}x+5}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{-x}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{x^3-x^2-x-1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{x^4+3x^3-4x+4}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{x^3+2x^2+3x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$