INTEGRACE SUBSTITUCÍ

PRVNÍ VĚTA O SUBSTITUCI

PŘÍKLAD 1

Pomocí první věty o substituci vypočítejte $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Obecný vzorec pro výpočet integrálu pomocí první věty o substituci zní

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y\Big|_{y=g(x)},$$

v integrandu zadaného integrálu musíme tedy především rozpoznat součin jisté složené funkce a derivace jí odpovídající funkce vnitřní. Někdy je takový součin viditelný na první pohled, jindy musíme integrand vhodně upravit. Zdá se, že v našem příkladě nastává druhá možnost – po jednoduché úpravě

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x$$

vidíme, že můžeme psát

$$g(x) = 1-x^2,\ \text{a tedy}\ g'(x) = -2x,$$
$$f(y) = 1/\sqrt{y}.$$

Použití první věty o substituci je dále již přímočaré

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} g(x) = 1-x^2 \\ f(y) = 1/\sqrt{y} \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=1-x^2} = -\tfrac{1}{2}\int y^{-1/2}\mathrm{d}y\Big|_{y=1-x^2}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{y^{1/2}}{1/2}\Big|_{y=1-x^2} + C = \underline{\underline{-\left(1-x^2\right)^{1/2} + C}}.$$

PŘÍKLAD 2

Pomocí první věty o substituci vypočítejte $\int \sin^3 x\cdot\cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Většinou nejsou úpravy převádějící zadaný integrál do tvaru bezprostředně vhodného k použití první věty o substituci tak jednoduché jako v předcházejícím příkladu. Jako možnou ilustraci komplikovanějších úprav uvádíme tento výpočet

$$\int \sin^3 x\cdot\cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin^3 x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} g(x)=\sin x \\ g'(x)=\cos x \\ f(y)=y^3\left(1-y^2\right) \end{bmatrix} =$$
$$= \int y^3\left(1-y^2\right)\mathrm{d}y\Big|_{y=\sin x} = \int\left(y^3-y^5\right)\mathrm{d}y\Big|_{y=\sin x} = \left(\tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{6}y^6\right)\Big|_{y=\sin x} + C = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}\sin^4 x - \tfrac{1}{6}\sin^6 x + C}}.$$

PŘÍKLAD 3

Pomocí první věty o substituci vypočítejte $\int h(x)h'(x)\,\mathrm{d}x$, kde $h(x)$ je neurčená (spojitě diferencovatelná) funkce .

Řešení

Někdy může být zadání integrálu docela obecné, a přesto samotný výpočet nemusí být příliš komplikovaný:

$$\int h(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} g(x) = h(x) \\ f(y) = y \end{bmatrix} = \int y\,\mathrm{d}y\Big|_{y=h(x)} = \tfrac{1}{2}y^2\Big|_{y=h(x)} + C = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}h^2(x) + C}}.$$

Protože zadání bylo obecné, je takovým do značné míry i výsledek integrace.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 – 3

1. Pomocí první věty o substituci vypočítejte následující integrály

a) $\int \frac{\ln^n x}{x}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$

b) $\int x(x^2+6)^n\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$

c) $\int \frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{x^{n-1}}{x^n - a^n}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

e) $\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

h) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\cos x + \sin x}}\,\mathrm{d}x$

i) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}\,\mathrm{d}x$

j) $\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x$

k) $\int \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x$

l) $\int \frac{f(x)}{1+f^2(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x$

DRUHÁ VĚTA O SUBSTITUCI

PŘÍKLAD 4

Pomocí substituce $x = at$ vypočítejte $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$, kde a je kladná reálná konstanta.

Řešení

Obecný vzorec pro výpočet integrálu pomocí druhé věty o substituci zní

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = h(t), \quad t = h^{-1}(x) \\ \mathrm{d}x = h'(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int f(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=h^{-1}(x)}.$$

Říká nám, jak substituci provést, nedává ale žádný návod, jak vhodnou substituci najít. Nalezení vhodné substituce je sice často velmi obtížná úloha, která vyžaduje nemalou dávku zkušeností, je-li ale substituce zadaná, je její provedení v podstatě jen rutinní záležitostí:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = at, t = x/a \\ \mathrm{d}x = a\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2t^2}}\,a\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t + C = \underline{\underline{\arcsin(x/a) + C}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 4

1. Pomocí podobné substituce jako v příkladu 4 vypočítejte následující integrály.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x$, $a < 0$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{5 - x^2}} \mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x$, $a \neq 0$ d) $\int \frac{1}{4\sqrt{3} + x^2} \mathrm{d}x$

2. Pomocí vhodné substituce typu $t = ax + b$ vypočítejte následující integrály.

a) $\int \sqrt{5x + 2}\, \mathrm{d}x$ b) $\int (ax + b)^n \mathrm{d}x$, $a \neq 0$ c) $\int \sin(-3x + \sqrt{2})\, \mathrm{d}x$ d) $\int e^{ax+b} \mathrm{d}x$, $a \neq 0$

3. Pomocí naznačených substitucí určete na zadaných intervalech následující integrály. Ověřte, že jsou navržené substituce prosté.

a) $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x\, \mathrm{d}x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x = \arcsin t$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \mathrm{d}x$, $x \in (0, +\infty)$, $x = \sqrt{t - 1}$, $t \in (1, +\infty)$

c) $\int \sqrt{4 - x^2} \mathrm{d}x$, $x \in (-2, 2)$, $x = 2\cos t$, $t \in (0, \pi)$

d) $\int x^3 e^{-x^2} \mathrm{d}x$, $x \in (-\infty, 0)$, $x = -\sqrt{t}$, $t \in (0, +\infty)$

d) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$, $x \in (0, +\infty)$, $x = t^2$, $t \in (0, +\infty)$

f) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \mathrm{d}x$, $x \in (1, +\infty)$, $x = 1/t$, $t \in (1, +\infty)$