INTEGRACE PER PARTES

PŘÍKLAD 1

Pomocí metody per partes vypočítejte $\int \ln x \,\mathrm{d}x$.

Řešení

Obecný vzorec pro výpočet integrálu pomocí metody per partes zní

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

integrand musí mít tedy tvar součinu dvou funkcí, z nichž alespoň jednu integrovat umíme. V integrálu ze zadání si potřebný součin musíme připravit uměle $\int 1\cdot \ln x \,\mathrm{d}x$.[1] Pak je již použití metody per partes přímočaré:

$$\int 1\cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} f'(x)=1, & f(x)=\int 1\,\mathrm{d}x = x \\ g(x)=\ln x, & g'(x)=(\ln x)' = 1/x \end{bmatrix} = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{x\ln x - x + C}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1. Pomocí metody per partes (podle potřeby opakovaně použité) vypočítejte následující integrály

a) $\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x$	c) $\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$	e) $\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$	g) $\int x^2 \cos x\,\mathrm{d}x$
b) $\int x e^x\,\mathrm{d}x$	d) $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$	f) $\int x \cos x\,\mathrm{d}x$	h) $\int (x-1)^2 e^x\,\mathrm{d}x$

PŘÍKLAD 2

Pomocí metody per partes vypočítejte $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Zapíšeme-li integrál ze zadání ve tvaru $\int \sin x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$, je použití metody per partes nasnadě

$$\int \sin x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} f'(x)=\sin x, & f(x)=\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \\ g(x)=\sin x, & g'(x)=(\sin x)' = \cos x \end{bmatrix} = -\cos x\cdot\sin x + \int \cos x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Bohužel se ale nezdá, že by vedlo k cíli – integrál ze zadání je převeden na zhruba stejně komplikovaný integrál $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$. Ani opakování per partes při výpočtu nového integrálu k cíli nevede. Sami si jistě ověříte, že bychom takto dospěli k sice platné, leč nic neříkající rovnosti $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Že by metoda per partes nebyla pro výpočet našeho integrálu vhodná? I když to tak na první pohled vypadá, není tomu naštěstí tak. Stačí si uvědomit, že

---

[1] Podobný „trik“ se používá poměrně často, takže je určitě užitečné si jej zapamatovat.

nový integrál $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ můžeme přepsat pomocí jednoduché identity $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ do tvaru

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = x - \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

a pomocí mezivýsledku, ke kterému nás dovedla integrace per partes, psát

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x\,.$$

Ani tato rovnost není sice na první pohled příliš užitečná – integrál $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ se vyskytuje na její levé i pravé straně. S opačnými znaménky ovšem, takže po jeho převedení např. na stranu levou získáme [2]

$$2\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\cos x \cdot \sin x + x$$

a po doplnění nezbytné integrační konstanty i konečný výsledek

$$\underline{\underline{\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(x - \cos x \cdot \sin x\right) + C}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 2

1. Podobně jako jsme v příkladu 2 počítali $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ vypočítejte následující integrály

a) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ •c) $\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ •d) $\int f'(x)f''(x)\,\mathrm{d}x$ •d) $\int f^{(n-1)}(x)f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$

PŘÍKLAD 3

Pomocí metody per partes vypočítejte $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Kromě jiného je metoda per partes vhodná k výpočtu integrálů inverzních goniometrických funkcí. Jak – to si ukážeme v tomto příkladu a procvičíme v navazujících cvičeních.

Postup je zpočátku obdobný jako v příkladu 1

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arcsin x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} f'(x) = 1, & f(x) = \int 1\,\mathrm{d}x = x \\ g(x) = \arcsin x, & g'(x) = \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix} = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Integrál ze zadání je tedy převeden na nový integrál $\int x/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, který snadno určíme, uvědomíme-li si, že platí [3]

[2] Další užitečný trik hodný zapamatování. Setkáme se s ním např. v některých z následujících příkladů a cvičení.
[3] Jinou možností je při výpočtu tohoto integrálu použít první větu o substituci.

$$\sqrt{1-x^2}' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

neboli

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2}\,.$$

Můžeme tedy psát konečný výsledek

$$\underline{\underline{\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}}\,.$$

<u>CVIČENÍ K PŘÍKLADU 3</u>

1. Postupem podle příkladu 3 vypočítejte následující integrály

a) $\int \arccos x\,\mathrm{d}x$ b) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ c) $\int \operatorname{arccotg} x\,\mathrm{d}x$

<u>PŘÍKLAD 4</u>

Pro $n \geq 1$ ověřte pomocí metody per partes rekurentní vzorec

$$\int x^n e^x\,\mathrm{d}x = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení

Při ověřování tohoto jednoduchého rekurentního vzorce budeme postupovat podle návodu uvedeného v *Breviáři* (první tabulka kap. 3.2):

$$\int x^n e^x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} f'(x) = e^x, & f(x) = \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x \\ g(x) = x^n, & g'(x) = \left(x^n\right)' = nx^{n-1} \end{bmatrix} = x^n e^x - \int nx^{n-1}e^x\,\mathrm{d}x = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,\mathrm{d}x\,.$$

<u>PŘÍKLAD 5</u>

Pro $n \geq 2$ ověřte pomocí metody per partes rekurentní vzorec

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení

Ne vždy je výpočet vedoucí k některému z rekurentních vzorců tak jednoduchý, jako ten z předcházejícího příkladu. Jako ilustraci komplikovanějšího rekurentního vzorce si uveďme vzorec pro výpočet integrálu $\int 1/(1+x^2)^n\,\mathrm{d}x$, mimochodem velmi významného pro integrování racionálních lomených funkcí.

Podle návodu z Breviáře postupujeme takto:

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} f'(x)=1, & f(x)=\int 1\mathrm{d}x = x \\ g(x)=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}, & g'(x)=\left[\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right]' = -n\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\cdot 2x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n} - \int x\cdot\left[-n\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\cdot 2x\right]\mathrm{d}x = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n} + 2n\int\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n} + 2n\int\frac{x^2+1-1}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n} + 2n\int\frac{x^2+1}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}x - 2n\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n} + 2n\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,\mathrm{d}x - 2n\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Označíme-li pro zjednodušení zápisu $\int 1/(1+x^2)^n\,\mathrm{d}x \equiv I_n$, můžeme tedy psát

$$I_n = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

a řešením této rovnice vzhledem k I_{n+1} získat

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n\left(1+x^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n\,.$$

To je již ale hledaný rekurentní vzorec, i když poněkud odlišný od toho, který je uveden v *Breviáři*. Přeznačením (substitucí) $n+1\equiv m$ (čili $n=m-1$) však snadno získáme

$$\underline{\underline{I_m}} = \frac{x}{2n\left(1+x^2\right)^{m-1}} + \frac{2(m-1)-1}{2(m-1)}I_{m-1} = \underline{\underline{\frac{x}{2n\left(1+x^2\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}I_{m-1}}}\,,$$

tedy vzorec, který je, po nepodstatném přejmenování indexu *m* zpět na *n*, zcela identický se vzorcem z *Breviáře*.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 4 A 5

1. Ověřte platnost všech rekurentních vzorců uvedených ve druhé tabulce kapitoly 3.2 *Breviáře*.