L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

LIMITY TYPU 0/0

PŘÍKLAD 1

Pomocí L´Hospitalova pravidla určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

Řešení

Ověření předpokladů L´Hospitalovy věty [1]

Přímočarým použitím věty o limitě podílu získáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}x}=\frac{0}{0}.$$

Jedná se tedy o neurčitou limitu typu 0/0 a můžeme použít L´Hospitalova pravidla.

Použití L´Hospitalova pravidla [2]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=\underline{\underline{\cos 0=1}}.$$

PŘÍKLAD 2

Pomocí L´Hospitalova pravidla určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Řešení

Ověření předpokladů L´Hospitalovy věty

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)}{\lim\limits_{x\to 0}x^2}=\frac{0}{0}.$$

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{0-(-\sin x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

Použitím L´Hospitalova pravidla jsme tedy dospěli k limitě z příkladu 1. O té ale víme, že je rovna jedné. Můžeme proto psát

[1] Použití L´Hospitalova pravidla, ať již v základní verzi podle L´Hospitalovy věty nebo v některé z verzí rozšířených, zahrnuje vždy dva kroky: a) ověření předpokladů, za nichž lze výpočet provést, b) samotný výpočet. Na místě je upozornění, že první krok je rovnocenný kroku druhému a není jej možno vynechat.

[2] Uvedený příklad je pouze jednoduchou ilustrací použití L´Hospitalovy věty. Ve skutečnosti bychom takto uvedenou limitu počítat nemohli, neboť k výpočtu potřebujeme znát derivaci funkce sinus a k určení této derivace zase počítanou limitu. Pohybujeme se tedy v kruhu. Stejná výhrada platí i pro příklad následující.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\times 1=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}\,.$$

Pokud bychom ale výsledek příkladu 1 neměli k dispozici, museli bychom použít L´Hospitalova pravidla ještě jednou.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2

1. Pomocí L´Hospitalova pravidla určete následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+x)}{1-\cos x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{100}-(1+100x)}{(1+x)^{99}-(1+99x)}$

LIMITY TYPU ∞/∞

PŘÍKLAD 3

Pomocí L´Hospitalova pravidla určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Řešení

Ověření předpokladů L´Hospitalovy věty

Přímočarým použitím věty o limitě podílu získáváme [3]

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=\frac{+\infty}{+\infty}\,.$$

Jedná se tedy o neurčitou limitu typu ∞/∞ a můžeme použít L´Hospitalova pravidla.

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=\underline{\underline{0}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 3

1. Pomocí L´Hospitalova pravidla určete následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln|x|}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x)^{100}}{x^5}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^5 x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_2 x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-2x)^3}{(1+2x)^3}$

[3] Stačilo by ovšem ověřit jen, že $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\equiv\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ (viz *Breviář*, L´Hospitalova věta).

LIMITY TYPU 0.∞

PŘÍKLAD 4

Určete $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\right)$.

Řešení

Převedení na L´Hospitalovu limitu

Limita, kterou se máme zabývat nyní, není ani neurčitou limitou typu 0/0, ani limitou typu ∞/∞. L´Hospitalova pravidla nemůžeme tedy použít, aniž provedeme jisté úpravy limitovaného výrazu. V tomto případě vede k cíli úprava

$$x\ln x=\frac{\ln x}{1/x},$$

která uvedenou limitu převádí na limitu typu ∞/∞. Platí totiž

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty .$$

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(1/x\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{1}\right)=\underline{\underline{-\lim_{x\to 0^+}x=0}}.$$

PŘÍKLAD 5

Určete $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2e^{-x^2}\right)$.

Řešení

Převedení na L´Hospitalovu limitu

Úprava

$$x^2e^{-x^2}=\frac{x^2}{e^{x^2}},$$

převádí uvedenou limitu na typ ∞/∞. Platí totiž

$$\lim_{x\to +\infty}x^2=+\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to +\infty}e^{x^2}=+\infty .$$

Při výpočtu této limity již můžeme použít L´Hospitalovo pravidlo.

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x^2e^{-x^2}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=\underline{\underline{\frac{1}{+\infty}=0}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 4 A 5

1. Určete následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2\log|x|\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\times\operatorname{arctg} x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^n e^{-x^2}\right)$, $n\in\mathbb{N}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)$

LIMITY TYPU 1^∞, 0^0 A ∞^0

PŘÍKLAD 6

Určete $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+ax)^{1/x}$, $a\in\mathbb{R}$.

Řešení

Převedení na L´Hospitalovu limitu

Ani při výpočtu této limity nelze použít L´Hospitalovo pravidlo přímo (jedná se o limitu typu 1^∞) a je nutno nejdříve provést úpravu [4]

$$(1+ax)^{1/x}=e^{\ln(1+ax)^{1/x}}=e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}}.$$

Pak můžeme psát

$$\lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{1/x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)}{x}}.$$

Použití L´Hospitalova pravidla

Především platí

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)'}{x'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+ax}a}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a}{1+ax}=a,$$

a proto i

$$\lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{1/x}=e^a.$$

PŘÍKLAD 7

Určete $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

Řešení

Dříve, než použijeme L´Hospitalovo pravidlo, musíme provést úpravu

$$x^x=e^{x\ln x},$$

pomocí které již můžeme psát

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}.$$

[4] viz *Breviář*, kap. 1.6

Tím je původní limita převedena na výpočet limity $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ z příkladu 4, kde je ukázáno, že $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=0$, a proto platí i

$$\underline{\underline{\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.}}$$

PŘÍKLAD 8

Určete $\lim_{x\to +\infty}(1+ax)^{1/x}$, $a>0$.

Řešení

Převedení na L´Hospitalovu limitu

Úprava, kterou použijeme před aplikací L´Hospitalova pravidla, je stejná jako v příkladech 6 a 7

$$(1+ax)^{1/x} = e^{\ln(1+ax)^{1/x}} = e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}}.$$

Můžeme tedy psát

$$\lim_{x\to +\infty}(1+ax)^{1/x} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+ax)}{x}}.$$

Použití L´Hospitalova pravidla

Samotné L´Hospitalovo pravidlo použijeme na výpočet limity v exponentu

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+ax)'}{x'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{1+ax}a}{1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{a}{1+ax} = \frac{a}{1+a(+\infty)} = \frac{a}{+\infty} = 0.$$

Pro původní limitu takto získáváme

$$\underline{\underline{\lim_{x\to +\infty}(1+ax)^{1/x} = e^0 = 1.}}$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 6 – 8

1. Určete následující limity.

a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$ b) $\lim_{x\to \pi/2^-}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ c) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x$ d) $\lim_{x\to +\infty} x^{n/x}$, $n\in\mathbb{N}$

LIMITY TYPU ∞ – ∞

PŘÍKLAD 9

Určete $\lim\limits_{x\to\pi/2^+}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)$.

Řešení

Převedení na L´Hospitalovu limitu

Pomocí úpravy

$$\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

převedeme původní limitu (typu ∞ – ∞) na novou limitu

$$\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{1-\sin x}{\cos x},$$

která je typu 0/0. Při výpočtu této nové limity můžeme tedy použít L´Hospitalovo pravidlo.

Použití L´Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{(1-\sin x)'}{\cos x'}=\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{0-\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{0}{1}=\underline{\underline{0}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 9

1. Určete následující limity.

a) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{cotg}x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$ [5] c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{2+x}\right)$ [6] d) $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$ [7]

---

[5] Po použití L´Hospitalova pravidla využijte v závěrečných úpravách vhodně znalosti limity $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

[6] A nakonec něco z jiného soudku. Limita, kterou máte počítat, je sice limitou typu $\infty-\infty$, tentokrát je ale vhodnější úprava poněkud odlišná od té, kterou jsme provedli v předcházejících dvou cvičeních – limitovaný výraz vynásobte jednotkovým zlomkem

$$\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{2+x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{2+x}}.$$

[7] I zde limitovaný výraz vhodně upravte a při výpočtu použijte $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=+\infty$.