# PRVNÍ DIFERENCIÁL, TAYLORŮV ROZVOJ
### FUNKCÍ JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

## PRVNÍ DIFERENCIÁL

**PŘÍKLAD 1**

Pomocí věty o prvním diferenciálu ukažte, že platí přibližná rovnost $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$, kde $\alpha$ je reálné číslo a $x$ je malé reálné číslo.

**Řešení**

Podle věty o prvním diferenciálu platí $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$, kde nyní je $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ a $a = 0$. Můžeme proto psát

- $f(a) = f(0) = (1+0)^{\alpha} = 1$,
- $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f'(a) = f'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha$.

Po dosazení do obecného vzorce získáme

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \alpha(x-0) = 1+\alpha x$$

a můžeme tedy uzavřít tvrzením, že platí

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x .$$

**PŘÍKLAD 2**

Pomocí věty o prvním diferenciálu určete přibližně hodnotu $\sqrt[3]{100}$.

**Řešení**

Číslu 100 jsou blízké dvě třetí mocniny celého čísla: $4^3 = 64$ a $5^3 = 125$. Nabízí se tedy možnost provést rozklad 100 = 64 + 36 (resp. 100 = 125 - 25) a použít přibližného vzorce z příkladu 1:

- $\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{64+36} = 4\sqrt[3]{1+\frac{36}{64}} = 4\sqrt[3]{1+\frac{9}{16}} \approx 4\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{9}{16}\right) = 4\left(1+\frac{3}{16}\right) = 4+\frac{3}{4} = 4,75$,
- $\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{125-25} = 5\sqrt[3]{1-\frac{25}{125}} = 5\sqrt[3]{1-\frac{1}{5}} \approx 5\left(1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right) = 5\left(1-\frac{1}{15}\right) = 5-\frac{1}{3} \doteq 4,67$.

Získané výsledky porovnejte s hodnotou přesnou na pět desetinných míst $\sqrt[3]{100} \doteq 4,64159$.

**CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2**

**1.** Pomocí věty o prvním diferenciálu ověřte platnost všech přibližných vzorců uvedených v *Breviáři* v poznámce na str. 20.

**2.** Pomocí věty o prvním diferenciálu určete přibližně hodnoty následujících výrazů a srovnejte je s hodnotami získanými výpočtem na kalkulačce.

a) $\sqrt[3]{1400}$  b) $11^{15}$  c) $\frac{1}{1018}$  d) $\sin 32^{\circ}$ [1]  e) $\operatorname{arctg} 1,05 - \operatorname{arctg} 1$

[1] Nezapomeňte argument funkce sin převést na obloukovou míru.

# TAYLORŮV ROZVOJ

**PŘÍKLAD 3**

Nalezněte Taylorův polynom obecného stupně $n$ pro funkci $f(x) = e^x$ a bod $a = 0$, $T_n(x; e^x, 0)$.

**Řešení**

Podle obecného vzorce platí

$$T_n(x; f, a) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k .$$

Ke konstrukci Taylorova polynomu stupně $n$ pro funkci $f$ na okolí bodu $a$ musíme tedy znát derivace rozvíjené funkce až do řádu $n$. V našem případě to znamená, že musíme určit

- $f^{(0)}(a) \equiv f(a) = e^0 = 1$,
- $f'(x) = (e^x)' = e^x$ a $f'(a) = e^0 = 1$,
- $f''(x) = (e^x)'' = (e^x)' = e^x$ a $f''(a) = e^0 = 1$,
- …
- $f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = \ldots = e^x$ a $f^{(n)}(a) = e^0 = 1$.

Po dosazení do obecného vzorce takto získáme

$$T_n(x; e^x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} \times 1 \times (x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} x^k = 1 + x + \tfrac{1}{2!} x^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!} x^n .$$

**PŘÍKLAD 4**

Pomocí Taylorových polynomů různých stupňů pro funkci $f(x) = e^x$ na okolí bodu $a = 0$ určete přibližně hodnotu Eulerova čísla.

**Řešení**

Funkci $e^x$ můžeme na okolí bodu 0 aproximovat podle předcházejícího příkladu polynomem

$$e^x \approx T_n(x; e^x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} x^k .$$

Pro Eulerovo číslo můžeme tedy psát

$$e = e^1 \approx T_n(1; e^x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} .$$

Numerické výsledky, které takto získáme pro různé hodnoty $n$ jsou shrnuty v následující tabulce. Porovnejte je s hodnotou přesnou na 9 desetinných míst ($e \doteq 2{,}718281828$).

| $n$ | $T_n(1; e^x, 0)$ | $n$ | $T_n(1; e^x, 0)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2,0 | 6 | 2,718555556 |
| 2 | 2,5 | 7 | 2,718253968 |
| 3 | 2,666666667 | 8 | 2,718278770 |
| 4 | 2,708333333 | 9 | 2,718281526 |
| 5 | 2,716666667 | 10 | 2,718281801 |

Poznámka

Již pomocí Taylorových polynomů nízkých řádů jsme tedy schopni určit hodnotu Eulerova čísla velmi přesně.

**PŘÍKLAD 5**

Pomocí Taylorova rozvoje pro $\operatorname{arctg}(x)$ se pokuste určit přibližnou hodnotu Ludolfova čísla.

**Řešení**

Víme například, že $\pi = 4\times\operatorname{arctg}(1)$. Pokusíme se proto určit hodnotu Ludolfova čísla pomocí přibližného vztahu $\pi \approx 4\times T_n(1;\operatorname{arctg},0)$. Nejdříve ovšem musíme najít příslušný Taylorův polynom, a to dostatečně vysokého řádu. Pro jednoduchost a přehlednost se omezíme na řád čtvrtý. Čtenář se ovšem může pokusit o dosažení řádů vyšších.

Nalezení $T_n(x;\operatorname{arctg},0)$

- $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $f(0) = \operatorname{arctg}(0) = 0$,
- $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f'(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = 1$,
- $f''(x) = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, $f''(0) = -\dfrac{2\times 0}{\left(1+0^2\right)^2} = 0$,
- $f'''(x) = \dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$, $f'''(0) = \dfrac{6\times 0^2-2}{\left(1+0^2\right)^3} = -2$,
- $f^{(4)}(x) = \dfrac{24x(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^4}$, $f^{(4)}(0) = \dfrac{24\times 0\times(1-0^2)}{\left(1+0^2\right)^4} = 0$.

Můžeme tedy psát

$$T_4(x;\operatorname{arctg},0) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-2)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 = x - \frac{1}{3}x^3.$$

Určení Ludolfova čísla

$$\pi \approx 4\times T_n(1;\operatorname{arctg},0) = 4\times(1-\frac{1}{3}) = \frac{8}{3} \doteq 2,67.$$

Poznámka

Všimněte si, že získaný výsledek není vůbec přesný. Na rozdíl od příkladu 4, kdy jsme byli schopni určit poměrně přesnou hodnotu Eulerova čísla pomocí Taylorových polynomů nevysokých řádů, bychom nyní k dosažení dostatečné přesnosti museli použít Taylorova polynomu velmi vysokého řádu. Použitý rozvoj funkce *arctg* není proto pro výpočet hodnoty Ludolfova čísla příliš vhodný.

**CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 3 - 5**

**1.** Pomocí Taylorovy věty ověřte platnost všech vzorců uvedených v *Breviáři* v poznámce na str. 21.

**2.** Pomocí Taylorových polynomů stupně 2 a 3 upřesněte hodnoty výrazů z cvičení 2 k příkladům 1 a 2 a srovnejte je s hodnotami získanými výpočtem na kalkulačce.

a) $\sqrt[3]{1400}$ b) $11^{15}$ c) $\frac{1}{1018}$ d) $\sin 32^{\circ}$ [2] e) $\operatorname{arctg}1,05 - \operatorname{arctg}1$

[2] Nezapomeňte argument funkce sin převést na obloukovou míru.

## POUŽITÍ TAYLOROVA ROZVOJE PŘI VÝPOČTU LIMIT

**PŘÍKLAD 6**

Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

**Řešení**

Uvedenou limitu nelze vypočítat přímým použitím algebraických vět, získali bychom totiž neurčitý výraz

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\frac{1-\cos 0}{0\times\sin 0}=\frac{0}{0}.$$

Jednou z možností, jak si s ní poradit,[3] je rozvést funkce sinus a kosinus na okolí bodu, v němž limitu počítáme ($a$ = 0) pomocí Taylorovy věty a přejít tak, až na zanedbatelné odchylky, k limitě podílu dvou polynomů. S takovou limitou si už totiž poradit umíme – viz příklady a cvičení věnované limitám.

Otázkou ovšem je, jakého stupně mají příslušné Taylorovy polynomy nabývat. Na jedné straně je jasné, že čím nižší stupně budou použité polynomy mít, tím méně náročné výpočty budeme muset provádět. Na druhé straně ale, příliš nízký stupeň použitých Taylorových polynomů nemusí vést k cíli. Nejjednodušší pravidlo, které můžeme čtenáři poradit, je začít polynomy co nejnižších stupňů (např. lineárními) a podle potřeby jejich stupeň zvyšovat tak dlouho, dokud nezískáme smysluplný výsledek.

I my začněme náš výpočet Taylorovými polynomy[4] funkcí sinus a kosinus stupně 1: $\cos x = 1+o_1(x)$ a $\sin x = x+o_2(x)$.[5] Po dosazení máme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+o_1(x)\right]}{x\left[x+o_2(x)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{-o_1(x)}{x^2+xo_2(x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{o_1(x)}{x}}{x\left[1+\frac{o_2(x)}{x}\right]}.$$

Protože ale podle definice platí

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{o_1(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\tfrac{o_2(x)}{x}=0,$$

je též

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{o_1(x)}{x}}{x\left[1+\frac{o_2(x)}{x}\right]}=\frac{0}{0}.$$

Výpočet pomocí Taylorových polynomů prvního řádu nevede zjevně v našem případě k cíli, budeme muset tedy použít polynomů stupňů vyšších. Další na řadě jsou polynomy stupně 2: $\cos x = 1-\frac{1}{2}x+o_3(x^2)$ a $\sin x = x+o_4(x^2)$. Po dosazení v tomto případě již získáme hledaný výsledek

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1-\frac{1}{2}x^2+o_3(x^2)\right]}{x\left[x+o_4(x^2)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2-o_3(x^2)}{x^2+xo_4(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left[\frac{1}{2}-\frac{o_3(x^2)}{x^2}\right]}{x^2\left[1+x\frac{o_4(x^2)}{x^2}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{o_3(x^2)}{x^2}}{1+x\frac{o_4(x^2)}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{o_3(x^2)}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}1+\lim\limits_{x\to 0}x\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{o_4(x^2)}{x^2}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}},$$

---

[3] Další možnost si ukážeme v kapitole věnované L´Hospitalovu pravidlu.

[4] Taylorovy polynomy funkcí sinus a kosinus uvádíme v *Breviáři* na str. 21. Tamtéž na str. 19 je uveden i význam symbolů $o(x^n)$.

[5] Symboly $o(x)$ označují pro kosinus a sinus obecně různé funkce, odlišujeme je tedy indexem.

neboť podle definice platí $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o_3(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{o_4(x^2)}{x^2}=0$ .

**CVIČENÍ K PŘÍKLADU 6**

**1.** Určete následující limity (pomocí Taylorových rozvojů v bodě 0)

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+x)}{1-\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{100}-(1+100x)}{(1+x)^{99}-(1+99x)}$

## Výsledky:

**CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1-2**

a) $\sqrt[3]{1728-328}=11{,}24$, $3\sqrt{1331+69}=11{,}18$ b) $4{,}18\cdot 10^{15}$ c) $9{,}82\cdot 10^{-3}$

d) 0,53 e) 0,0244

**CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 3-5**

a) $\sqrt[3]{1728-328}=11{,}28371$, $3\sqrt{1331+69}=11{,}18689$ b) $4{,}18\cdot 10^{15}$ c) $9{,}82\cdot 10^{-3}$

d) 0,53023 e) 0,0233

**CVIČENÍ K PŘÍKLADU 6**

a) 1 b) 1 c) $\dfrac{3}{2}$ d) 1 e) $\dfrac{50}{49}$