

PRŮBĚH FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Cílem vyšetřování průběhu funkce je umět nakreslit její graf. Obvykle postupujeme tak, že nalezneme

- její maximální definiční obor,
- průsečíky jejího grafu s osami x a y ,
- intervaly, na nichž je spojitá, a body nespojitosti,
- limity (i jednostranné) v krajních bodech jejího definičního oboru a v bodech, v nichž není spojitá,
- intervaly monotonie, tj. intervaly, na nichž je klesající, rostoucí či konstantní,
- její lokální extrémy,
- intervaly, na nichž je konkávní či konvexní, a její inflexní body,
- její asymptoty.

Po provedení výše uvedeného programu máme již o studované funkci zpravidla k dispozici dostatek informací na to, abychom její graf mohli načrtnout. Další užitečné informace mohou být, zda je funkce sudá či lichá, zda je periodická apod.

PŘÍKLAD 1

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Řešení

Maximální definiční obor

Protože výraz $1+x^2$ je vždy nenulový, je maximální definiční obor studované funkce totožný s množinou všech reálných čísel, $D_f = \mathbb{R}$.

Průsečík s osou y

$$f(0) = \frac{0}{1+0^2} = 0$$

Průsečíky s osou x

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Body nespojitosti

Funkce je spojitá na množině všech reálných čísel, neboť funkce $g(x) = x$ a $h(x) = 1+x^2$ jsou spojitými funkcemi na \mathbb{R} ¹ a funkce $h(x)$ nenabývá navíc v žádném bodě reálné osy nulové hodnoty.²

¹ Viz *Breviář*, kap. 1.1, str. 11.

² Podle věty o limitě podílu, viz *Breviář* kap. 1.1, platí pro libovolný bod a reálné osy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}{\lim_{x \rightarrow a} h(x)}.$$

Protože jsou ale obě funkce spojité, můžeme dále psát

$$\dots = \frac{g(a)}{h(a)} = \frac{g}{h}(a).$$

Limita funkce g/h se tedy v libovolném bodě reálné osy rovná její funkční hodnotě, a proto je tato funkce v libovolném bodě reálné osy též spojitá (viz *Breviář*, kap. 1.1, str. 7).

Limity v nekonečnu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + x} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} + \infty} = \frac{1}{0 + \infty} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + x} = \frac{1}{\frac{1}{-\infty} - \infty} = \frac{1}{0 - \infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Intervaly monotonie

Intervaly monotonie hledáme řešením nerovnic $f'(x) > 0$ resp. $f'(x) < 0$. Potřebujeme tedy znát první derivaci studované funkce

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Příslušné nerovnice řešíme obvyklým způsobem

$$\triangleright f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1),$$

$$\triangleright f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0 \Leftrightarrow 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Na intervalu $(-1, 1)$ je tedy funkce f rostoucí, na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$ klesající.

Lokální extrém

Na základě právě určených intervalů monotonie vidíme okamžitě, že v bodě $x = -1$ nabývá studovaná funkce svého lokálního minima a v bodě $x = 1$ lokálního maxima. Samostatně to ověřte výpočtem nulových bodů první derivace funkce f a pomocí znaménka derivace druhé.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti

Při vyšetřování konvexnosti a konkávnosti zadané funkce řešíme nerovnice $f''(x) > 0$ resp. $f''(x) < 0$, musíme proto znát její druhou derivaci

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x}{1+x^2} \right)'' = \left[\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right]' = \frac{(1-x^2)'(1+x^2)^2 - (1-x^2)(1+x^2)^2'}{(1+x^2)^4} = \\ &= \frac{(-2x)(1+x^2)^2 - (1-x^2)[2(1+x^2)2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}, \end{aligned}$$

Nerovnice vedoucí k intervalům, na nichž je studovaná funkce konvexní či konkávní, řešíme opět některým ze standardních způsobů. Např. nalezneme nejdříve nulové body $f''(x)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow x(3-x^2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3})$$

a vezmeme v úvahu fakt, že na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}, +\infty)$ nemění druhá derivace studované funkce znaménko. Snadným výpočtem ověříme, že

- pro $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ je $f''(x) < 0$, a tedy funkce f je na tomto intervalu konkávní,
- pro $x \in (-\sqrt{3}, 0)$ je $f''(x) > 0$, a tedy funkce f je na tomto intervalu konvexní,
- pro $x \in (0, \sqrt{3})$ je $f''(x) < 0$, a tedy funkce f je na tomto intervalu konkávní,
- pro $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$ je $f''(x) > 0$, a tedy funkce f je na tomto intervalu konvexní.

Asymptota v $-\infty$

Asymptota v $-\infty$ je přímka $y = kx + q$, ke které se graf zadané funkce neomezeně blíží, pokud nezávislá proměnná klesá pode všechny meze, $x \rightarrow -\infty$. Její parametry k a q hledáme pro zadanou funkci pomocí vzorců³

$$k_{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+(-\infty)^2} = \frac{1}{1+\infty} = 0,$$

$$q_{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_{-\infty}x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{1+x^2} - 0x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

Asymptotou v $-\infty$ je tedy přímka $y = 0$, čili osa x .

Asymptota v $+\infty$

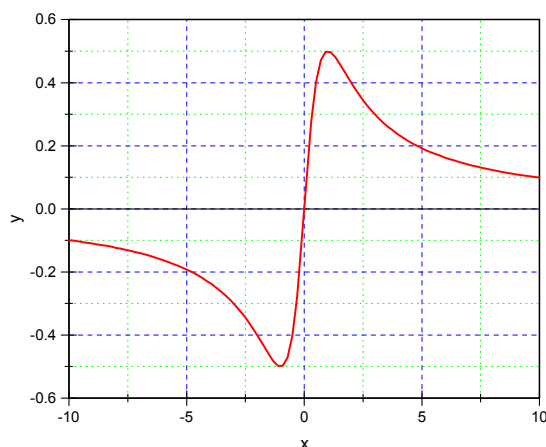
Zcela analogickým výpočtem získáme i parametry asymptoty v $+\infty$, ke které se graf funkce f neomezeně blíží pro $x \rightarrow +\infty$.

$$k_{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\infty^2} = \frac{1}{1+\infty} = 0,$$

$$q_{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_{+\infty}x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{1+x^2} - 0x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

I asymptotou v $+\infty$ je tedy osa x .⁴

Graf



³ Abychom zdůraznili fakt, že se jedná o asymptotu v $-\infty$, opatřujeme parametry k a q indexem $-\infty$.

⁴ Shodou okolností jsou v tomto příkladu asymptoty v $-\infty$ i v $+\infty$ totožné. Obecně tomu tak ale být nemusí!

CVIČENÍ

1. Vyšetřete průběh následujících funkcí a nakreslete jejich grafy.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \sin^2 x$ ⁽⁵⁾

b) $f(x) = x^4 - x^2 - 2$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \operatorname{tg} x$ ⁽⁶⁾

c) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = 2x^{3/2} - 9x + 12\sqrt{x}$

i) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Výsledky:**CVIČENÍ 1**

$D_f = R,$

Klesající $\left(\frac{-1 - \sqrt{7}}{3}; \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}\right),$

Rostoucí

a) $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{7}}{3}; \infty\right),$ d)

$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ konkávní,

$\left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ konvexní,

$D_f = R,$

Klesající $(-1, 2; 0, 3),$ Rostoucí $(-\infty; -1, 2) \cup (0, 3; \infty),$

b) $x = -\frac{1}{2}$ maximum,

$x = \frac{1}{2}$ minimum,

$\left(\frac{1}{6}; \infty\right)$ konvexní,

$D_f = R,$

rostoucí $(-\infty, 0),$ klesající $(0, \infty),$ $x = 0$ maximum,

Na celém

 D_f konkávní,

$D_f = R,$

klesající $(-\infty, 0),$ rostoucí $(0, \infty),$

e) $x = 0$ minimum,

 $(-1; 1)$ konvexní, $(-\infty; -1) \cup (1; \infty),$

konkávní,

$D_f = R,$

klesající $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) + k\pi,$ kde

$k \in Z,$

rostoucí $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi,$ kde

$k \in Z,$

g) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ maximum,

$x = \pi + k\pi$ minimum,

konkávní $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) + k\pi,$ konvexní $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) + k\pi,$

$D_f = R \setminus (2n+1)\frac{\pi}{2}$

konkávní $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) + k\pi,$

h) konvexní $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi,$

Na každém intervalu rostoucí
Nemá max ani min,

⁵ U této funkce vyšetřete její průběh na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.

⁶ U této funkce vyšetřete její průběh na intervalu $(0, 2\pi)$.

<p>$D_f = \mathbb{R} \setminus 0$ $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ rostoucí, $(-1; 1)$ klesající, $x = -1$ maximum, $x = 1$ minimum, $(0; \infty)$ konvexní, $(-\infty; 0)$ konkávní,</p>	<p>$D_f = (0, \infty)$ rostoucí $(0, 1) \cup (4, \infty)$, klesající $(1, 4)$, f) $x = 1$ maximum, $x = 4$ minimum, $\langle 0; 2 \rangle$ konkávní, $(2; \infty)$ konvexní,</p>	<p>$x = \{n\pi\}$, kde $n \in \mathbb{N}$ lok. max, $x = \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2} \right\}$ lok. min, i) V celém D_f je rostoucí, Nemá max ani min, $(-\infty; 0)$ konvexní, $(0; \infty)$ konkávní.</p>
--	--	--

