LOKÁLNÍ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY
FUNKCÍ JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

Při hledání lokálních extrémů postupujeme podle následujícího programu

- Nalezneme podezřelé body, tj. body, v nichž má funkce nulovou první derivaci (nebo první derivaci nemá či dokonce není ani spojitá).
- V těchto bodech určíme hodnotu druhé derivace studované funkce. Je-li kladná, jedná se o lokální minimum, je-li záporná, jedná se o lokální maximum.
- Je-li v některém z podezřelých bodů druhá derivace nulová, musíme ke konečnému rozhodnutí o povaze extrému použít derivace vyšší. Tyto vyšší derivace počítáme tak dlouho, dokud nenarazíme na první nenulovou. Je-li lichého řádu, funkce v tomto bodě lokální extrém nemá, v případě nenulové derivace sudého řádu, funkce v tomto bodě lokální extrém má. Pro kladnou derivaci se jedná o lokální minimum, v případě derivace záporné o lokální maximum.

Pokud v některém z podezřelých bodů první derivace neexistuje, nebo je funkce dokonce nespojitá, test s druhou (vyšší) derivací pochopitelně neprovádíme. O povaze extrému musíme zpravidla rozhodnout přímo pomocí definice (lokálních extrémů). Velmi užitečný bývá obrázek, který obvykle získáme vyšetřením průběhu studované funkce na malém redukovaném okolí podezřelého bodu.

PŘÍKLAD 1

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Řešení

Podezřelé body

- $f'(x) \equiv \left(x^2 - 3x + 4\right)' = 2x - 3$,
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$.

Jediným podezřelým bodem je $x = 3/2$. Žádné další podezřelé body neexistují, protože funkce je spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

Test s druhou derivací

- $f''(x) \equiv \left(x^2 - 3x + 4\right)'' = \left(2x - 3\right)' = 2$,
- $f''(3/2) = 2 > 0$.

Funkce tedy nabývá pro $x = 3/2$ svého lokálního minima.

PŘÍKLAD 2

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$.

Řešení

Podezřelé body

- $f'(x) \equiv \left(-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1\right)' = -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4$,
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0 = -4\left(x - 1\right)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ani v tomto případě žádné další podezřelé body kromě $x = 1$ neexistují. Zadaná funkce je opět spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

Test s druhou derivací

- $f''(x) \equiv \left(-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1\right)'' = \left(-4x^3 + 12x^2 - 12x + 4\right)' = -12x^2 + 24x - 12$,
- $f''(1) = 0$.

Pomocí samotné druhé derivace nelze tedy o existenci ani o povaze lokálního extrému rozhodnout. Musíme tedy provést test s vyššími derivacemi.

Test s vyššími derivacemi

- $f'''(x) = \left(-12x^2 + 24x - 12\right)' = -24x + 24$, $f'''(1) = 0$.
- $f^{(4)}(x) = \left(-24x + 24\right)' = -24$, $f^{(4)}(1) = -24 < 0$.

První nenulovou derivací je tedy derivace čtvrtá (sudá!), funkce má tedy v bodě $x = 1$ lokální extrém. Protože je tato derivace záporná, jedná se o lokální maximum.

PŘÍKLAD 3

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3$.

Řešení

Podezřelé body

- $f'(x) \equiv {x^3}' = 3x^2$,
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Žádné další podezřelé body neexistují – funkce je spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

Test s druhou derivací

- $f''(x) \equiv {x^3}'' = \left(3x^2\right)' = 6x$,
- $f''(0) = 0$.

Na základě druhé derivace nelze o existenci ani o povaze lokálního extrému v tomto případě rozhodnout. Následovat musí proto test s derivacemi vyššími.

Test s vyššími derivacemi

- $f'''(x) = \left(6x\right)' = 6$, $f'''(0) = 6 > 0$.

První nenulovou derivací je derivace třetí (lichá!), funkce nemá proto v bodě $x = 0$ lokální extrém. Ve skutečnosti se jedná o inflexní bod.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1-3

1. Nalezněte lokální extrémy těchto funkcí a určete jejich typ

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$	d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$	g) $f(x) = e^{-x^2}$
b) $f(x) = (x^2 - 1)^2$	e) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$	h) $f(x) = \sqrt{9 - 4x^2}$
c) $f(x) = (x - 2)^7$	f) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$	i) $f(x) = \cos^2 x$

GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Při hledání globálních extrémů zadané funkce **na uzavřeném intervalu** $\langle a,b\rangle$ postupujeme podle takto

- Na intervalu (a,b) nalezneme body, v nichž funkce nabývá svých lokálních extrémů,
- k nim přidáme krajní body intervalu a a b a získáme tak množinu bodů, v nichž může studovaná funkce svého globálního maxima či minima na zadaném intervalu nabývat.
- Pro všechny podezřelé body určíme funkční hodnoty studované funkce a seřadíme je podle velikosti.
- V bodě (bodech), v němž je funkční hodnota největší, nabývá funkce na daném intervalu globálního maxima, v bodě (bodech), v němž je funkční hodnota nejmenší, globálního minima.

Při hledání globálních extrémů **na polouzavřených** či **otevřených intervalech**, musíme věnovat zvýšenou pozornost krajním bodům, viz příklady 5 a 6.

PŘÍKLAD 4

Nalezněte (globální) extrémy funkce $f(x)=x^2-3x+4$ na intervalu $\langle 0,2\rangle$.

Řešení

Podezřelé body na $(0,2)$

- $f'(x)\equiv\left(x^2-3x+4\right)'=2x-3$,
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=3/2\in(0,2)$.

Žádné další podezřelé body na uvedeném intervalu neexistují – viz příklad 1.

Všechny podezřelé body

- $x_1=0$ - levý krajní bod intervalu,
- $x_2=3/2$ - lokální extrém,
- $x_3=2$ - pravý krajní bod intervalu.

Tabulka funkční hodnot v podezřelých bodech

- $f(0)=0^2-3\times 0+4=4$,
- $f(3/2)=(3/2)^2-3\times(3/2)+4=1{,}75$,
- $f(2)=2^2-3\times 2+4=2$.

Globální extrémy

V bodě x = 3/2 nabývá studovaná funkce na zadaném intervalu svého globálního minima (toto minimum je současně i jejím minimem lokálním) a v bodě x = 0 globálního maxima (toto maximum naopak lokálním maximem studované funkce není).

PŘÍKLAD 5

Nalezněte (globální) extrémy funkce $f(x)=x^2-3x+4$ na intervalu $\left(0,2\right\rangle$.

Řešení

Záměrně volíme stejnou funkci a velmi podobný interval jako v příkladu 4. Porovnejte obě řešení.

Podezřelé body na $(0,2)$

- $f'(x)\equiv\left(x^2-3x+4\right)'=2x-3$,
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=3/2\in(0,2)$.

Žádné další podezřelé body na uvedeném intervalu neexistují – viz příklad 1.

Všechny podezřelé body

- $x_1 = 0$ - levý krajní bod intervalu
  (**pozor!** – nepatří do množiny, na niž globální extrémy vyšetřujeme),
- $x_2 = 3/2$ - lokální extrém,
- $x_3 = 2$ - pravý krajní bod intervalu.

Tabulka funkční hodnot v podezřelých bodech

- $f(0) = 0^2 - 3\times 0 + 4 = 4$,
- $f(3/2) = (3/2)^2 - 3\times(3/2) + 4 = 1{,}75$,
- $f(2) = 2^2 - 3\times 2 + 4 = 2$.

Globální extrémy

V bodě x = 3/2 nabývá studovaná funkce na zadaném intervalu svého globálního minima. Toto minimum je současně i jejím minimem lokálním. Až dosud se naše závěry neliší od závěrů přecházejícího příkladu.

Globálního maxima by měla studovaná funkce nabývat v bodě $x = 0$. Tento bod však do intervalu $\left(0,2\right\rangle$ nepatří. Musíme proto konstatovat, že na intervalu $\left(0,2\right\rangle$ funkce svého maxima nenabývá.

PŘÍKLAD 6

Nalezněte (globální) extrémy funkce $f(x) = x^2 - 3x + 4$ na intervalu $(2,3)$.

Řešení

Podezřelé body na $(2,3)$

- $f'(x) \equiv \left(x^2 - 3x + 4\right)' = 2x - 3$,
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \notin (2,3)$.

Bod x = 3/2 tedy mezi podezřelé body nezahrneme.

Dalšími podezřelými body by byly krajní body zadaného intervalu. Protože do něj nepatří a žádný další podezřelý bod, s nímž bychom porovnávali funkční hodnoty v nich nabývané, není k dispozici, nemusíme je brát v úvahu.

Na uvedeném intervalu nemáme tedy k dispozici žádný podezřelý bod, a funkce f proto na něm svého globálního maxima ani svého globálního minima nenabývá.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 4-6

1. Nalezněte globální extrémy zadaných funkcí na zadaných intervalech

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$, $x \in \langle 1,3\rangle$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$, $x \in \langle 0,1\rangle$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}} - \dfrac{1}{2}x^2$, $x \in \left\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\rangle$

d) $f(x) = 2x^{3/2} - 9x + 12\sqrt{x}$, $x \in \left(0,4\right\rangle$

e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $x \in (-2,1)$

f) $f(x) = 5 - \sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $x \in \langle 1,3)$

POUŽITÍ V PRAKTICKÝCH ÚLOHÁCH

Úloha nalézt extrémy funkcí jedné, ale i více reálných proměnných se často vyskytuje v přírodovědných, technických či dokonce v ekonomických, finančních nebo i sociologických aplikacích. Zpravidla vyžaduje důkladnou analýzu, při které se snažíme na základě obecného zadání formulovat zadání matematické, tj. určit

- funkci, jejíž extrémy budeme hledat,
- interval hodnot, kterých může nezávislá proměnná (nastavitelný parametr) nabývat.

Teprve po provedení této úvodní analýzy můžeme přistoupit k samotnému vyšetření extrémů prostředky a postupy, které jsme procvičovali výše.

PŘÍKLAD 7

Motouzem o délce L vymezte obdélníkový pozemek maximální plošné výměry.

Řešení

Analýza úlohy

Obdélník je zadán svými stranami a a b. Jeho obvod (který odpovídá délce motouzu L) je dán vztahem $O = 2(a+b)$ a plošný obsah vztahem $S = ab$.

Ze zadání úlohy plyne, že $L = 2(a+b)$, neboli $b = L/2-a$. A pro plošný obsah $S = a(L/2-a)$. Máme proto hledat maximum funkce [1]

$$S(a) = a\,L/2 - a^2,$$

a to zřejmě na intervalu $a \in \langle 0, L/2 \rangle$.

Nalezení extrému

Podezřelé body na $(0, L/2)$

- $S'(a) = \left(a\,L/2 - a^2\right)' \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(a\,L/2 - a^2\right) = L/2 - 2a,$
- $S'(a) = 0 \Leftrightarrow L/2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = L/4 \in (0, L/2).$

Žádné další podezřelé body neexistují, protože funkce je spojitá a diferencovatelná na celém svém definičním oboru.

Všechny podezřelé body

- $a_1 = 0$ - levý krajní bod intervalu
- $a_2 = L/4$ - lokální extrém,
- $a_3 = L/2$ - pravý krajní bod intervalu.

Tabulka funkční hodnot

- $S(0) = 0 \times L/2 - 0^2 = 0,$
- $S(L/4) = (L/4) \times (L/2) - (L/4)^2 = L/16,$
- $S(L/2) = (L/2) \times (L/2) - (L/2)^2 = 0.$

Globální maximum

Funkce $S(a) = a\,L/2 - a^2$ nabývá svého globálního maxima na intervalu $\langle 0, L/2 \rangle$ v bodě $a = L/4$. Hledaný obdélník má proto rozměry $a = b = L/4$. Jedná se tedy o čtverec.

---

[1] L je zadaná konstanta.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 7 [2]

1. Součet dvou nezáporných čísel je 12. Najděte tato čísla, jestliže součet jejich třetích mocnin je minimální.
2. Jaký je nejekonomičtější tvar válcové konzervy daného objemu? Tj. kdy bude mít tato konzerva minimální povrch a tudíž se na její výrobu spotřebuje nejméně plechu?
3. Z plechu o rozměrech 10 cm x 20 cm máme vyrobit krabici bez víka tak, že v každém rohu vyřízneme čtverce stejných rozměrů a pak ohnutím složíme čtyři stěny. Jak velké čtverce musíme vyříznout, aby objem takové krabice byl maximální?
4. Jakou největší délku má horizontální úsečka ohraničená grafy funkcí $y=\sqrt{x}$ a $y=x^2$ definovaných na intervalu $\langle 0,1\rangle$?
5. Výrobce mýdlových vloček má stálé týdenní výdaje 10 000 dolarů a nadto 200 dolarů na každou vyrobenou tunu vloček. Stanoví-li cenu vloček na p dolarů, prodá jich 500 – p/2 tun týdně. Při jaké ceně bude jeho zisk maximální?
6. Učitel matematické analýzy dovolil studentům, aby si zvolili kladné číslo x s tím, že student, který bude mít z testu alespoň $100\left(1-\frac{12x}{10x^2+21}\right)$ bodů, udělá úspěšně zkoušku. Jak mají x zvolit?
7. Pobřeží jezera se táhne od východu k západu. Muž se plaví v člunu 5 km severně od pobřežního místa A a chce se dostat do místa B, které leží 10 km východně od A, v co nejkratším čase. Jakou nejmenší dobu k tomu potřebuje, plaví-li se rychlostí 3 km/h a chodí-li rychlostí 5 km/h?

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1-3

1a)	$x=\frac{3}{2}$ lok. max.	1d)	$x=\pm 1$ lok. max. $x=0$ lok. min.	1g)	$x=0$ lok. max.
1b)	$x=0$ lok. min. $x=\pm 1$ lok. min.	1e)	Funkce nemá lok. max ani min	1h)	$x=0$ lok. max. $x=\pm\frac{3}{2}$ lok. min.
1c)	$x=2$ lok. min.	1f)	Funkce nemá lok. max. ani min.	1i)	$x=\{n\pi\}$, kde $n\in N$ lok. max $x=\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2}\right\}$ lok. min

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 4-6

1a)	$x=1$ glob. max. $x=\frac{5}{2}$ glob. min.	1d)	$x=1$ glob. max. $x=4$ glob. min.
1b)	$x=1$ glob. max. $x=0$ glob. min.	1e)	$x=-1$ glob. min. glob. max není
1c)	$x=1$ glob. max. $x=\pm\sqrt{3}$ glob. min.	1f)	$x=1$ glob. min. $x=2$ glob. max.

[2] Vybráno z L. GILLMAN, R. H. MCDOWELL, *Matematická analýza*, SNTL, Praha 1980.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 7

1. $a, b = 6$,

2. Nejekonomičtější tvar konzervy je, když $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ a $v = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

3. Krabice z plechu bude mít maximální objem, pokud z rohů plechu odstřihneme čtverce o stranách $a = \dfrac{10}{\sqrt{6}}$.

4. $\sqrt[4]{\dfrac{3}{8}}$.

5. Zisk výrobce mýdlových vloček bude maximální při ceně 600 dolarů za jednu tunu vloček.

6. Měli by zvolit číslo $\sqrt{2,1}$.

7. $3,28$ hod.