VEKTOROVÉ A KOMPLEXNÍ FUNKCE
JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

LIMITY VEKTOROVÝCH A KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ

PŘÍKLAD 1

Určete $\lim\limits_{x\to 2}\mathbf{f}(x)$ vektorové funkce $\mathbf{f}(x)=\left[\dfrac{x^2+1}{x-1},\dfrac{x^2-4}{x-2},\dfrac{x-2}{x}\right]$.

Řešení

Limita vektorové funkce se počítá po složkách, můžeme tedy psát

$$\lim_{x\to 2}\mathbf{f}(x)=\left[\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x-1},\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2},\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x}\right],$$

čímž celý problém převádíme na úlohu výpočtu tři limit reálných funkcí jedné reálné proměnné (viz kapitola 1 *Spojitost a limity*). Snadno zjistíme, že

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x-1}=5 \quad , \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x}=0\,,$$

a tedy

$$\underline{\underline{\lim_{x\to 2}\mathbf{f}(x)=[5,4,0]}}\,.$$

PŘÍKLAD 2

Určete $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ komplexní funkce $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}-i\dfrac{1-\cos x}{x}$.

Řešení

Limitu komplexní funkce $f(x)=f_{\mathrm{R}}(x)+i\,f_{\mathrm{I}}(x)$ počítáme podle obecného vzorce

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}f_{\mathrm{R}}(x)+i\lim_{x\to a}f_{\mathrm{I}}(x)\,.$$

V našem případě to znamená, že

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+i\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1-\cos x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-i\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\,.$$

Protože ale z kapitoly 1 (*Spojitost a limity*) víme, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0\,,$$

můžeme bez otálení psát

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1+i0=\underline{\underline{1}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1-2

1. Vypočítejte limity následujících vektorových a komplexních funkcí v zadaném bodě

a) $\mathbf{f}(x) = \left[\dfrac{x^{10}}{4x^{10} - x^8}, \dfrac{x}{1-3x} \right]$, $a = +\infty$

b) $\mathbf{f}(t) = \left[\dfrac{\operatorname{tg} x}{2x}, \dfrac{4\sin^2 x}{x^2}, \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x} \right]$, $a = 0$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x} + i\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$, $a = -1$

d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^5 + x^4 - x^2} - i\dfrac{6x^2 - x - 1}{12x^2 + 14}$, $a = -\infty$

2. Pomocí vět o limitě součtu a součinu reálných funkcí dokažte platnost podobných tvrzení i pro funkce vektorové (symbolem $\cdot$ označujeme skalární a symbolem $\times$ vektorový součin) [1]

●a) $\lim\limits_{x\to a}\left[\mathbf{f}(x) \pm \mathbf{g}(x)\right] = \lim\limits_{x\to a}\mathbf{f}(x) \pm \lim\limits_{x\to a}\mathbf{g}(x)$,

●b) $\lim\limits_{x\to a}\left[\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x)\right] = \lim\limits_{x\to a}\mathbf{f}(x) \cdot \lim\limits_{x\to a}\mathbf{g}(x)$,

●●c) $\lim\limits_{x\to a}\left[\mathbf{f}(x) \times \mathbf{g}(x)\right] = \lim\limits_{x\to a}\mathbf{f}(x) \times \lim\limits_{x\to a}\mathbf{g}(x)$.

3. Pomocí vět o limitě součtu, součinu a podílu reálných funkcí dokažte platnost podobných tvrzení i pro funkce komplexní

●a) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

●b) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

●●c) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) / g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) / \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Derivace vektorových a komplexních funkcí

PŘÍKLAD 3

Určete derivaci vektorové funkce $\mathbf{f}(x) = \left[\cos x, -\sin x, x^4 + 1\right]$ v bodě $a = 2\pi/3$.

Řešení

I derivace vektorových funkcí počítáme po složkách. Pro naše konkrétní zadání to znamená, že platí

$$\mathbf{f}'(x) = \left[(\cos x)', (-\sin x)', (x^4 + 1)'\right]$$

a po provedení naznačených derivací

$$\mathbf{f}'(x) = \left[-\sin x, -\cos x, 4x^3\right].$$

Derivaci funkce **f** v bodě $a = 2\pi/3$ nakonec dopočítáme prostým dosazením

$$\mathbf{f}'(\tfrac{2\pi}{3}) = \left[-\sin\tfrac{2\pi}{3}, -\cos\tfrac{2\pi}{3}, 4(\tfrac{2\pi}{3})^3\right] = \underline{\underline{\left[-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{32}{27}\pi^3\right]}}.$$

[1] **Návod:** Přejděte k vyjádření vektorových funkcí jako uspořádaných n-tic funkcí reálných a využijte tvrzení $\lim\left[f_1, \ldots, f_n\right] = \left[\lim f_1, \ldots, \lim f_n\right]$.

<u>PŘÍKLAD 4</u>
Určete derivaci komplexní funkce $f(x)=\cos(2x)+i\sin(2x)$ v bodě $a=\frac{3\pi}{4}$.

Řešení
Derivaci komplexní funkce $f(x)=f_\mathrm{R}(x)+i\,f_\mathrm{I}(x)$ počítáme podle obecného vzorce

$$f'(x)=f_\mathrm{R}{}'(x)+i\,f_\mathrm{I}'(x)\,,$$

což v našem případě dává

$$f'(x)=\left[\cos(2x)\right]'+i\left[\sin(2x)\right]'=-2\sin(2x)+2i\cos(2x)$$

a po dosazení

$$f'(\tfrac{3\pi}{4})=-2\sin(2\times\tfrac{3\pi}{4})+2i\cos(2\times\tfrac{3\pi}{4})=-2\sin(\tfrac{3\pi}{2})+2\cos(\tfrac{3\pi}{2})=(-2)\times(-1)+2\times0=\underline{\underline{2}}\,.$$

<u>CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 3-4</u>

1. Vypočítejte derivace následujících vektorových a komplexních funkcí v zadaném bodě

a) $\mathbf{f}(x)=\left[\cos(4x+2),\sin(4x+2)\right]$, $a=\frac{1}{4}$

b) $\mathbf{f}(x)=\left[\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},2x+x^3\right]$, $a=0$

c) $f(x)=\ln(4x+3)+i\sqrt{2x+5}$, $a=-\frac{1}{2}$

d) $f(x)=\arcsin(2x)+i\arccos(2x)$, $a=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. Pomocí vět o derivaci součtu a součinu reálných funkcí dokažte platnost podobných tvrzení i pro funkce vektorové (symbolem $\cdot$ označujeme skalární a symbolem $\times$ vektorový součin) [2]

●a) $\left[\mathbf{f}\pm\mathbf{g}\right]'(x)=\mathbf{f}'(x)\pm\mathbf{g}'(x)$,

●b) $\left[\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\right]'(x)=\mathbf{f}'(x)\cdot\mathbf{g}(x)+\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}'(x)$,

●●c) $\left[\mathbf{f}\times\mathbf{g}\right]'(x)=\mathbf{f}'(x)\times\mathbf{g}(x)+\mathbf{f}(x)\times\mathbf{g}'(x)$.

3. Pomocí vět o derivaci součtu, součinu a podílu reálných funkcí dokažte platnost podobných tvrzení i pro funkce komplexní

●a) $\left[f\pm g\right]'(x)=f'(x)\pm g'(x)$,

●b) $\left[f\cdot g\right]'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$,

●●c) $\left[\dfrac{f}{g}\right]'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

---

[2] **Návod:** Přejděte k vyjádření vektorových funkcí jako uspořádaných n-tic funkcí reálných a využijte tvrzení $\left[f_1,\ldots,f_n\right]'=\left[f_1',\ldots,f_n'\right]$.

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1-2

1a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\right]$

1b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \left[\frac{1}{2}, 4, 1\right]$

1c) $\lim_{x\to -1} f(x) = 2 - \frac{4}{5}i$

1d) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}i$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 3-4

1a) $f'\left(\frac{1}{4}\right) = [-4\cdot\sin 3, 4\cdot\cos 3]$

1b) $f'(0) = [1, 0, 2]$

1c) $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}i$

1d) $f'(x) = 4\sqrt{1,5} - 4\sqrt{4,5}i$