SPOJITOST A LIMITY
FUNKCÍ JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

ÚVODNÍ POZNÁMKY

Níže procvičujeme pouze výpočet limit, o spojitosti se nezmiňujeme. To proto, že vyšetření spojitosti funkce je možno vždy převést na výpočet limity (viz *Breviář*, odst. 1.1).

Limitu zadané funkce v zadaném bodě (i nevlastním) reálné osy můžeme počítat několikerým způsobem:
- přímo pomocí definice,
- pomocí vět o algebře limit,
- pomocí pokročilejších vět (např. L´Hospitalova pravidla).

V této kapitole se soustředíme na první dvě možnosti, L´Hospitalovu pravidlu věnujeme kapitolu samostatnou. Nezbytnou teorii je možno nalézt v Breviáři v odst. 1.1.

Při výpočtu nejčastěji používaných limit se obvykle postupuje následovně. Nejdříve se určí limity nejjednodušších funkcí přímo z definice, v dalším se tento základní soubor limit užije k výpočtu limit komplikovanějších pomocí vět o algebře limit, nerovnostech mezi limitami nebo pomocí prostředků pokročilejších (např. již zmíněného L´Hospitalova pravidla). V následujícím je tento přirozený postup ilustrován na několika řešených příkladech i neřešených cvičeních.

VÝPOČET LIMIT POMOCÍ DEFINICE

Použití definice limity vede obvykle na technicky velmi komplikovaný problém vyžadující zpravidla vysoce netriviální znalosti o nerovnostech. Níže se můžeme proto zabývat jen a pouze těmi nejjednoduššími příklady. Ty slouží k ilustraci, jak definici použít. Jejich propočtení v žádném případě nestačí na to, abyste se definice limit naučili aktivně používat.

VLASTNÍ LIMITA VE VLASTNÍM BODĚ

Jaký je obvyklý postup při důkazu tvrzení, že funkce f má v bodě a limitu A, tj. $\lim_{x\to a} f(x) = A$?

1. Doplníme konkrétní údaje ze zadání příkladu do definice, tj. konkrétní tvar funkce f a konkrétní hodnoty čísel a a A do výrokové formy
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon,$$
jejíž pravdivost máme dokázat. Tj. máme ukázat, že pro libovolné ε umíme nalézt δ tak, aby byla pravdivá v definici se vyskytující implikace.
2. V požadovaném důkazu vyjdeme z výrazu $|f(x)-A|$, který upravujeme tak, až jej převedeme prostřednictvím posloupnosti nerovností $|f(x)-A| \le \ldots \le \alpha|x-a|$ na výraz $\alpha|x-a|$, kde α je nějaké kladné číslo.
3. Pokud se nám to povede, jsme hotovi, protože pak již stačí jen volit $\delta < \varepsilon/\alpha$, např. $\delta = (\varepsilon/\alpha)/2$ nebo $\delta = (\varepsilon/\alpha)/3$ atd. Při takové volbě totiž platí $\varepsilon > \alpha\delta > \alpha|x-a| \ge |f(x)-A|$, a tedy i $|f(x)-A| < \varepsilon$.

PŘÍKLAD 1

Dokažte, že $\lim_{x\to 3}(5x-6) = 9$.

Řešení

Při řešení příkladu postupujeme podle programu vytýčeného v předcházející poznámce.[1]

[1] Jak jsme zjistili, čemu je uvedená limita rovna? Prostým dosazením. Funkce z tohoto příkladu je spojitá, limita v nějakém bodě jejího definičního oboru je proto rovna její funkční hodnotě v tomto bodě. Protože se budete většinou setkávat s funkcemi spojitými, uvedený jednoduchý postup výpočtu limity bude obvykle fungovat.

ad 1) Nejdříve dosadíme ze zadání do definice

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(5x-6)-9| < \varepsilon.$$

ad 2) V dalším kroku se snažíme převést výraz $|(5x-6)-9|$ na $|x-3|$. Tentokrát to jde snadno $|(5x-6)-9| = |5x-15| = |5(x-3)| = 5|x-3|$.

ad 3) Vidíme tedy bezprostředně, že α z obecného návodu je rovno 5 a že k dokončení důkazu stačí volit $\delta < \varepsilon/5$, např. $\delta = \varepsilon/10$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1. Dokažte pomocí definice vlastní limity ve vlastním bodě následující rovnosti

a) $\lim\limits_{x\to 2}(13x-21) = 5$	d) $\lim\limits_{x\to -3}(-4x-12) = 0$	g) $\lim\limits_{x\to a}(-x+q) = -a+q$
b) $\lim\limits_{x\to -3}(10x+20) = -10$	●e) $\lim\limits_{x\to 2} 5 = 5$ [2]	●h) $\lim\limits_{x\to a}(kx+q) = ka+q,\ k \neq 0$
c) $\lim\limits_{x\to 1}(-6x-12) = -18$	f) $\lim\limits_{x\to a} x = a$ [3]	i) $\lim\limits_{x\to 2} c = c$

PŘÍKLAD 2

Dokažte, že $\lim\limits_{x\to 4} x^2 = 16$.

Řešení

I v tomto příkladě se budeme držet obecného návodu.

1) Nejprve opět dosazení zadání do definice:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |x^2-16| < \varepsilon.$$

2) Jako další krok tedy máme upravovat výraz $|x^2-16|$. Postup je nasnadě

$$|x^2-16| = |(x-4)(x+4)| = |x-4||x+4|.$$

Získaný mezivýsledek nás svádí položit $\alpha = |x+4|$ a požadovat $\delta < \varepsilon/|x+4|$. Takto to ovšem nejde, *a* musí být konstanta, nemůže proto záviset na nezávislé proměnné *x*. Řešení tohoto příkladu vyžaduje přece jen poněkud jemnější úvahy oproti těm, s nimiž jsme vystačili v příkladu předcházejícím.

Musíme si uvědomit, že při výpočtu limity v bodě $a = 4$ nás podle definice zajímá chování limitované funkce jen na nějakém malém redukovaném okolí tohoto bodu. V *Breviáři* jsme takové okolí psali ve tvaru $(a-\Delta, a) \cup (a, a+\Delta)$. Volme nyní např. $\Delta = 1$. Na sjednocení intervalů $(4-1,4) \cup (4,4+1) \equiv (3,4) \cup (4,5)$ je funkce $f(x) = x^2$ určitě definovaná (do jejího definičního oboru patří dokonce celý interval (3,5)) a první předpoklad definice limity ve vlastním bodě je proto splněn. Omezíme-li se v dalším jen na ta *x*, která patří do uvedeného sjednocení, můžeme psát $3 < x < 5$, a tedy i $7 < x+4 < 9$. Platí proto zcela jistě $|x+4| < 9$ a my můžeme pokračovat ve výše započatých úpravách $|x^2-16|$ nerovností

[2] Zde máme na mysli konstantní funkci $f(x) = 5$.

[3] V cvičeních f – i jsou *a*, *k*, *q* a *c* konstantní parametry.

$$|x^2-16|=\ldots=|x-4||x+4|<9|x-4|.$$

3) Tím jsme ovšem hotovi, protože nyní už můžeme podle všech pravidel volit $\alpha=9$ a $\delta<\varepsilon/9$. Takže opět např. (náhodou!) $\delta=\varepsilon/10$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 2

1. Dokažte pomocí definice vlastní limity ve vlastním bodě následující rovnosti

a) $\lim\limits_{x\to 2}(-x^2)=-4$

b) $\lim\limits_{x\to -1}(5x^2)=5$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$

d) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-10)=2$

e) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x)=2$

f) $\lim\limits_{x\to -2}(2x^2+3x)=2$

g) $\lim\limits_{x\to 3}(-x^2+2x+1)=-2$

●h) $\lim\limits_{x\to a}x^2=a^2$

●●i) $\lim\limits_{x\to a}(kx^2+px+q)=ka^2+pa+q$, $k,p\neq 0$ [4]

●●j) $\lim\limits_{x\to 2}x^3=8$

●●k) $\lim\limits_{x\to -1}x^3=-1$

●●l) $\lim\limits_{x\to 2}x^4=16$

●●m) $\lim\limits_{x\to 1}(-x^4)=-1$

Ostatní typy limit

I pro ostatní typy limit – nevlastní, v nevlastních bodech či jednostranné – se používá postup velmi podobný tomu, s nímž jsme se seznamovali v předcházejícím textu na příkladech vlastních limit ve vlastních bodech. Následující příklady mají sloužit jen jako vybrané ilustrace použití tohoto postupu při výpočtu ostatních typů limit, v žádném případě si nekladou za cíl pokrýt všechny možnosti.

PŘÍKLAD 3

(nevlastní limita ve vlastním bodě)

Dokažte, že $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3}{x}=+\infty$.[5]

Řešení

1) Nejdříve musíme opět dosadit ze zadání do obecné definice. Ta pro nevlastní limitu $+\infty$ funkce *f* ve vlastním bodě *a* zprava zní

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty \text{ právě, když } \forall K>0\,\exists\delta>0:\quad \forall x\in D_f\quad 0<x-a<\delta\Rightarrow f(x)>K\,.$$

Po dosazení ze zadání vidíme, že máme dokázat platnost tvrzení

$$\forall K>0\,\exists\delta>0:\quad \forall x\in D_f\quad 0<x<\delta\Rightarrow \frac{3}{x}>K\,.$$

2) I nyní bude výchozím bodem našich úvah druhá z nerovností, $3/x>K$. Tu můžeme vzhledem ke kladnému znaménku *x* i *K* psát též ve tvaru $x<3/K$, z nějž vidíme, že pokud pro zadané kladné *K* zvolíme δ tak, že bude platit $\delta<3/K$, jsme hotovi, neboť

$$x<\delta<\frac{3}{K}\quad\Rightarrow\quad x<\frac{3}{K}\quad\Rightarrow\quad \frac{3}{x}>K\,.$$

3) Na závěr tedy zvolme jednu z nekonečně mnoha možností, jak splnit podmínku $\delta<3/K$. Např. $\delta=1/K$.

---

[4] *a*, *k*, *p* a *q* jsou konstantní parametry.

[5] Všimněte si, že tentokrát se poprvé setkáváme s jednostrannou limitou. Pamatujete si, jak se změní definice oproti limitě oboustranné?

PŘÍKLAD 4
(vlastní limita v nevlastním bodě)

Dokažte, že $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$.

Řešení

1) I v tomto případě začneme dosazením do obecné definice. Připomeňme si nejdříve její tvar pro obecnou funkci $f(x)$ a limitu A:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ právě, když } \forall\varepsilon > 0\, \exists M > 0: \quad \forall x \in D_f \quad x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Po dosazení tedy máme ukázat, že platí

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists M > 0: \quad \forall x \in D_f \quad x > M \Rightarrow \left|\frac{3}{x}\right| < \varepsilon.$$

2) Jako už tradičně, vycházíme ze druhé nerovnosti, kterou můžeme vzhledem ke kladnosti x přepsat na $3/x < \varepsilon$. A protože i ε je podle předpokladu kladné, platí též $3/\varepsilon < x$, odkud vidíme, že vhodná volba M je $3/\varepsilon < M$. Pak totiž můžeme psát

$$x > M > \frac{3}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{3}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{x} < \varepsilon$$

a splnit tak implikaci vyskytující se ve výše uvedené definici.

3) K ukončení důkazu opět vyberme jednu z nekonečně mnoha možností, jak splnit podmínku $3/\varepsilon < M$. Tak např. $M = 5/\varepsilon$.

PŘÍKLAD 5
(nevlastní limita v nevlastním bodě)

Dokažte, že $\lim\limits_{x\to-\infty} (5x) = -\infty$.

Řešení

Nyní už jen stručně, postup je až na drobné změny stejný jako v předcházejících dvou příkladech.

1) Obecná definice zní

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ právě, když } \forall K < 0\, \exists M < 0: \quad \forall x \in D_f \quad x < M \Rightarrow f(x) < K$$

a po dosazení

$$\lim_{x\to-\infty} (5x) = -\infty \text{ právě, když } \forall K < 0\, \exists M < 0: \quad \forall x \in D_f \quad x < M \Rightarrow 5x < K.$$

2) Ze druhé nerovnosti, $5x < K$, vyplývá $x < K/5$, a je tedy třeba volit $M < K/5$. Pak totiž

$$x < M < \frac{K}{5} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{K}{5} \quad \Rightarrow \quad 5x < K.$$

3) Jedna z možných voleb vedoucích ke splnění podmínky $M < K/5$ je pro záporné M i K např. $M < K$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 3 – 5

1. Dokažte pomocí odpovídajících definic následující rovnosti

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\frac{3}{x}\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2}{x} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(-\frac{10}{x}\right) = 0$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x+6} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-6x) = -\infty$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} (3{,}14\,x) = +\infty$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-2{,}5\,x) = -\infty$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} (6x-3) = +\infty$

Výpočet limit pomocí vět o algebře limit

PŘÍKLAD 6

Pomocí vět o limitě součtu, rozdílu a součinu vypočítejte

$$\lim_{x\to -2} (4x^3 - 2x^2 + 6x)\,.$$

Řešení

Nejdříve použijeme větu o limitě součtu a rozdílu[6]

$$\lim_{x\to -2} (4x^3 - 2x^2 + 6x) = \lim_{x\to -2} (4x^3) - \lim_{x\to -2} (2x^2) + \lim_{x\to -2} (6x)$$

a na každý sčítanec pak opakovaně větu o limitě součinu

$$\lim_{x\to -2} (4x^3) = \left(\lim_{x\to -2} 4\right)\left(\lim_{x\to -2} x^3\right) = \left(\lim_{x\to -2} 4\right)\left(\lim_{x\to -2} (xx^2)\right) = \left(\lim_{x\to -2} 4\right)\left(\lim_{x\to -2} x\right)\left(\lim_{x\to -2} x^2\right) =$$

$$= \ldots = \left(\lim_{x\to -2} 4\right)\left(\lim_{x\to -2} x\right)\left(\lim_{x\to -2} x\right)\left(\lim_{x\to -2} x\right),$$

$$\lim_{x\to -2} (2x^2) = \left(\lim_{x\to -2} 2\right)\left(\lim_{x\to -2} x^2\right) = \left(\lim_{x\to -2} 2\right)\left(\lim_{x\to -2} (xx)\right) = \left(\lim_{x\to -2} 2\right)\left(\lim_{x\to -2} x\right)\left(\lim_{x\to -2} x\right),$$

$$\lim_{x\to -2} (6x) = \left(\lim_{x\to -2} 6\right)\left(\lim_{x\to -2} x\right).$$

Nakonec tedy můžeme psát

$$\lim_{x\to -2} (4x^3 - 2x^2 + 6x) = \left(\lim_{x\to -2} 4\right)\left(\lim_{x\to -2} x\right)^3 - \left(\lim_{x\to -2} 2\right)\left(\lim_{x\to -2} x\right)^2 + \left(\lim_{x\to -2} 6\right)\left(\lim_{x\to -2} x\right).$$

K dokončení výpočtu potřebujeme určit limity z pravé strany poslední rovnosti. Přímo pomocí definice (viz též cvičení f a i k příkladu 1) bychom snadno dokázali, že platí

$$\lim_{x\to -2} 4 = 4 \quad , \quad \lim_{x\to -2} 2 = 2 \quad , \quad \lim_{x\to -2} 6 = 6 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to -2} x = -2\,,$$

a proto i

$$\lim_{x\to -2} (4x^3 - 2x^2 + 6x) = 4(-2)^3 - 2(-2)^2 + 6(-2) = -52\,.$$

[6] Napoprvé vše podrobně rozepisujeme, později už budeme stručnější. I vy si zpočátku vše podrobně rozepisujte a vždy se ptejte, jakou větu jste v daném kroku použili.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 6

1. Určete následující limity

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^4-6x^3\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-x}{x+2}$ g) $\lim\limits_{x\to 1/2}(x^2-x^{-2})$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\left(x^2-x\right)\left(3x+1\right)\right]$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}\right]$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\left[(x-3)^{-1}+(x+3)^{-2}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to -6}\left[\left(x+1\right)^2\left(x+6\right)^3\right]$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-2}\right)^4$

●**2.** Pomocí principu matematické indukce dokažte platnost tvrzení

$$\lim_{x\to a} x^n=\left(\lim_{x\to a} x\right)^n$$

a pomocí tohoto vztahu dále

$$\lim_{x\to a} x^{-n}=\left(\lim_{x\to a} x\right)^{-n}.$$

3. Za předpokladu, že $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, určete následující limity [7]

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+a}-e^a}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos^2 x-2\cos x}{x^3}$

●c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+a)-\sin a}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

PŘÍKLAD 7

Pomocí vět o limitě součtu, rozdílu a součinu vypočítejte

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x^3+x-2}{x^2+x-6}.$$

Řešení

Přímočarou aplikací vět o limitě podílu, součtu a součinu (proveďte podrobně sami!) bychom tentokrát získali

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x^3+x-2}{x^2+x-6}=\ldots=\frac{2^4-2\times 2^3+2-2}{2^2+2-6}=\frac{0}{0}.$$

Tedy výraz, který není ani v rámci rozšířených pravidel pro počítání s reálnými čísly definován. Použití vět o algebře limit je ale podle *Breviáře* přípustné pouze tehdy, dojdeme-li pomocí nich k dobře definovaným výrazům. V opačném případě (jako je tento) není možno příslušné věty použít takto přímočaře a bez dalších úvah. Řešení se nabízejí v podstatě dvě. Jednak je možno použít vět sofistikovanějších (jakou je např. věta L´Hospitalova, o které se

[7] **Návod:** Limitované výrazy upravte nejdříve tak, aby se v nich vyskytovaly jen z dřívějška známé limity a limity ze zadání, a pak užijte algebraických vět. Symbolem *a* označujeme konstantní parametr.

ještě zmíníme v jedné z následujících kapitol), nebo limitovanou funkci před použitím algebraických vět upravit. V tomto příkladě se vydáme druhou cestou.

Potřebná úprava je nasnadě. Protože hodnota $x = 2$ je kořenem polynomů ve jmenovateli i v čitateli, musí být oba dělitelné lineárním dvojčlenem $x-2$. Snadným výpočtem[8] získáme

$$\left(x^4-2x^3+x-2\right):\left(x-2\right)=x^3+1,$$

$$\left(x^2+x-6\right):\left(x-2\right)=x+3.$$

Můžeme proto též psát

$$x^4-2x^3+x-2=\left(x^3+1\right)\left(x-2\right),$$

$$x^2+x-6=\left(x+3\right)\left(x-2\right),$$

a tedy i [9]

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x^3+x-2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3+1\right)\left(x-2\right)}{\left(x+3\right)\left(x-2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+1}{x+3}=\ldots=\frac{2^3+1}{2+3}=\frac{9}{5}.$$

Po naznačené úpravě jsme tedy získali výraz, jehož limitování vedlo, po použití vět o algebře limit, k dobře definovanému podílu dvou celých čísel. Pokud bychom napoprvé neuspěli, museli bychom se buď vrátit k výrazu původnímu a pokusit se o úpravy jiné, nebo dále upravovat získaný výraz tak dlouho, až by bylo použití algebraických vět přípustné. Bohužel ne vždy se to musí povést.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 7

1. Určete následující limity

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$ d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4+2x^3-11x^2-12x+36}{x^4+3x^3-7x^2-15x+18}$ ●g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ [10]

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6+x^4}{x^3-x}$ e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$ [11] ●h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}$ [12]

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^4-a^4}{x}$ ●i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}{x-a}$

PŘÍKLAD 8

Pomocí vět o limitě součtu a součinu a pomocí pravidel pro počítání s nekonečny vypočítejte $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+6x+1\right)$.

Řešení

Nejdříve se pokusíme o bezprostřední použití v zadání navrhovaných vět. Pokud dostaneme interpretovatelný výsledek, jsme hotovi, jinak budeme muset vyzkoušet něco jiného. Takže

[8] O dělení polynomů viz. např. J. POLÁK, *Přehled středoškolské matematiky*.

[9] Při přechodu od druhé ke třetí limitě využíváme toho, že podle definice je $x\neq 2$, a můžeme tedy krátit výrazem $x-2$, a na závěr (označeno ..., podrobně doplňte sami) používáme příslušné algebraické věty.

[10] Při výpočtu této limity využijte faktu, že odmocnina je spojitá funkce na svém definičním oboru, tedy že $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ pro libovolné kladné a a že lze psát $x-2=\sqrt{x}^2-\sqrt{2}^2$.

[11] V cvičení (e), (f) a i je a konstantní parametr

[12] I třetí a všechny vyšší odmocniny jsou na svém definičním oboru spojité funkce.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+6x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(6x\right)+\lim_{x\to+\infty}1=\lim_{x\to+\infty}3\times\left(\lim_{x\to+\infty}x\right)^2+\lim_{x\to+\infty}6\times\lim_{x\to+\infty}x+\lim_{x\to+\infty}1.$$

Pomocí definice snadno zjistíme, že [13]

$$\lim_{x\to+\infty}3=3,\ \lim_{x\to+\infty}6=6,\ \lim_{x\to+\infty}1=1 \text{ a } \lim_{x\to+\infty}x=+\infty,$$

což po dosazení dává [14]

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+6x+1\right)=\ldots=3\times(+\infty)^2+6\times(+\infty)+1=3\times(+\infty)\times(+\infty)+6\times(+\infty)+1=$$
$$=+\infty+\infty+1=+\infty+1=+\infty.$$

Pomocí algebraických vět jsme tedy dospěli k výsledku

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+6x+1\right)=+\infty.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 8

1. Určete následující limity

a) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x+10\right)$
c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-3}{18}$
e) $\lim_{x\to+\infty}\left[(x+6)(-x-10)\right]$
b) $\lim_{x\to-\infty}\left(-6x^3-x\right)$
d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{15}{x^3+12x-16}$
f) $\lim_{x\to-\infty}(x-2)^4$

Ne vždy je možno při počítání limit, v nichž se vyskytují nekonečna, postupovat tak přímočaře, jak jsme si to ukázali v příkladě 8 a v navazujících cvičeních. V následujících dvou příkladech nastíníme dva užitečné triky, jak si poradit, narazíme-li při limitování na neurčité výrazy.

PŘÍKLAD 9

Pomocí vět o limitě součtu a součinu a pomocí pravidel pro počítání s nekonečny vypočítejte $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+x+1\right)$.

Řešení

Postup nastíněný v příkladu 8 tentokrát nefunguje, po použití vět ze zadání bychom dospěli k nedefinovanému výrazu $+\infty-\infty$. Ověřte! Naštěstí je možno tento problém obejít vhodnou algebraickou úpravou. Stačí, když si uvědomíme, že

$$x^2+x+1=x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right),$$

což znamená, že z limitovaného polynomu máme vytknout nejvyšší mocninu nezávislé proměnné *x*. Pak lze totiž bez potíží psát

[13] Proveďte.

[14] Využíváme následujících rovností (viz *Breviář*, odst. 1.1): $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$, $c\times(+\infty)=+\infty$, kde c je kladná konstanta, a $+\infty+c=+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}x^2\times\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\dots$$

$$=\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)^2\times\left[\lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}x}+\frac{1}{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}x\right)^2}\right]=(-\infty)\times(-\infty)\times\left[1+\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{(-\infty)^2}\right]=$$

$$=+\infty\times\left[1+\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{+\infty}\right]=+\infty\times\left[1+0+0\right]=+\infty\,.$$

Platí tedy

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+x+1\right)=+\infty\,.$$

PŘÍKLAD 10

Pomocí vět o limitě součtu a součinu a pomocí pravidel pro počítání s nekonečny vypočítejte $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-2x+1}{2x^2-6}$.

Řešení

Ani na tuto limitu nemůžeme jít „hrubou silou“. Dříve, než použijeme věty o algebře limit, musíme provést drobnou úpravu limitovaného výrazu. Tentokrát trik, který vede k cíli, spočívá ve vytknutí nejvyšší mocniny nezávislé proměnné x z čitatele i jmenovatele limitovaného zlomku. V tomto konkrétním příkladě vytýkáme x^2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-2x+1}{2x^2-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{6}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}4-\frac{2}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}+\frac{1}{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}x\right)^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\frac{6}{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}x\right)^2}}=$$

$$=\frac{4-\frac{2}{+\infty}+\frac{1}{(+\infty)^2}}{2-\frac{6}{(+\infty)^2}}=\frac{4-\frac{2}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}}{2-\frac{6}{+\infty}}=\frac{4-0+0}{2-0}=\frac{4}{2}=2\,.$$

Ačkoliv se v mezivýsledcích vyskytovala nezřídka nekonečna, výsledná limita je konečná

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-2x+1}{2x^2-6}=2\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 9 A 10

1. Určete následující limity

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x+10\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+2}{-4x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^7+4x^3-2x}{5x^6-3x^2+7}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^2}{x^5+x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-2)(2x+1)}{(-x+3)(3x+2)}$

●g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k\equiv\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\right)$, kde $a_0,a_1,\ldots,a_n$ jsou konstanty, $a_n\neq 0$

●h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$

●i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}b_kx^k}\equiv\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n}$, kde $a_0,a_1,\ldots,a_n$ a $b_0,b_1,\ldots,b_n$ jsou konstanty, $a_n,b_n\neq 0$

●j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}b_kx^k}$

●●k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k}{\sum\limits_{k=0}^{m}b_kx^k}\equiv\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$ a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k}{\sum\limits_{k=0}^{m}b_kx^k}$

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1a)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{13}$,	1d)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{4}$,	1g)	$\delta<\varepsilon$,
1b)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{10}$,	1e)	δ může být libovolné kladné číslo,	1h)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{k}$,
1c)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{6}$,	1f)	$\delta<\varepsilon$,	1i)	δ může být libovolné kladné číslo.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 2

1a)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{5}$,	1d)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{15}$,	1g)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{5}$,
1b)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{15}$,	1e)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{4}$,	1h)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{2\lvert a\rvert+1}$,
1c)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{3}$,	1f)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{7}$,	1i)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{\lvert k+p\rvert}$,
1j)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{19}$,	1l)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{65}$,		
1k)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{6,25}$,	1m)	$\delta<\dfrac{\varepsilon}{5}$.		

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 3-5

1a)	$\delta < -\frac{1}{K}$,	1e)	$M < -\frac{2}{\varepsilon}$,	1i)	spor, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-6x) \neq -\infty$,
1b)	$\delta < -\frac{3}{K}$,	1f)	$M < -\frac{10}{\varepsilon}$,	1j)	$M > \frac{K}{3{,}14}$,
1c)	$\delta < \frac{1}{K} + 3$,	1g)	$M > \frac{1}{\varepsilon} - 6$,	1k)	$M > -\frac{K}{2{,}5}$,
1d)	$\delta < \sqrt{\frac{1}{K}}$,	1h)	$M > \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}}$,	1l)	$M > \frac{K+3}{6}$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 6

1a)	-4,	1d)	$\frac{14}{3}$,	1g)	$-3{,}75$,
1b)	-4,	1e)	-2,	1h)	$-\frac{24}{25}$.
1c)	0,	1f)	$\frac{1}{16}$,		
3a)	1,	3d)	$\frac{1}{2}$,	3g)	e^a.
3b)	1,	3e)	0,		
3c)	$\cos a$,	3f)	2,		

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 7

1a)	$\frac{3}{4}$,	1d)	$\frac{5}{4}$,	1g)	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$,
1b)	0,	1e)	$3a^2$,	1h)	$\frac{\sqrt[3]{3}-3}{24}$,
1c)	$\frac{1}{3}$,	1f)	$4a^3$,	1i)	$\frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}}$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 8

1a)	$+\infty$,	1c)	$-\infty$,	1e)	$-\infty$,
1b)	$+\infty$,	1d)	0,	1f)	$+\infty$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 9 A 10

1a)	$+\infty$,	1c)	$-\frac{3}{2}$	1e)	$-\infty$,
1b)	$-\infty$,	1d)	0,	1f)	$-\frac{2}{3}$,

1g) $a_n > 0 \Rightarrow +\infty$, $a_n = 0 \Rightarrow 0$, $a_n < 0 \Rightarrow -\infty$

1h) k je liché a $a_k < 0$ => $+\infty$, k je sudé a $a_k > 0$ => $+\infty$,
k je liché a $a_k > 0$ => $-\infty$, k je sudé a $a_k < 0$ => $-\infty$;

1i) $\frac{a_n}{b_n}$

1j) $\dfrac{a_n}{b_n}$

1k) $x \to +\infty$:

$n < m$ => 0

$n = m$ => $\dfrac{a_n}{b_n}$

$n > m$
- $\dfrac{a_n}{b_n} > 0$ => $+\infty$
- $\dfrac{a_n}{b_n} < 0$ => $-\infty$

$x \to -\infty$:

$n < m$ => 0

$n = m$ => $\dfrac{a_n}{b_n}$

$n > m$
- n sudé a m sudé, $\dfrac{a_n}{b_n} > 0$ => $+\infty$
- n sudé a m sudé, $\dfrac{a_n}{b_n} < 0$ => $-\infty$
- n liché a m liché, $\dfrac{a_n}{b_n} > 0$ => $+\infty$
- n liché a m liché, $\dfrac{a_n}{b_n} < 0$ => $-\infty$
- n sudé a m liché, $\dfrac{a_n}{b_n} > 0$ => $-\infty$
- n sudé a m liché, $\dfrac{a_n}{b_n} < 0$ => $+\infty$
- n liché a m sudé, $\dfrac{a_n}{b_n} > 0$ => $-\infty$
- n liché a m sudé, $\dfrac{a_n}{b_n} < 0$ => $+\infty$